O utworach szeregów i pęków inwolucyjnych.

Utworem dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych n-ego stopnia jest krzywa $2n$-go rzędu, która w wierzchołkach pęków posiada punkty n-krotne.

Użycie inwolucji do gieometrycznego otrzymania krzywych dyktowane jest nadzwyczajnie prostą i dokładną konstrukcją punktów tej krzywej, a także możnością degieneracji w granicach dowolnych. Tym sposobem stwarza się ciągłość i ustala kondygnacje w budowie krzywych, fundamentem której jest prosta, względnie punkt.

Trudności konstrukcyjne przy otrzymaniu krzywych z inwolucji maleją do tego stopnia, że jak to już stwierdzić mogłem, wyznaczenie punktów krzywych rzędów o wiele wyższych nad czwarty, z łatwością jest wykonalne.

W rozprawie niniejszej ograniczam się do utworów jednokreślnych pęków i szeregów inwolucyjnych stopnia drugiego.

Prócz krzywych rzędu czwartego z dwoma punktami podwójnemi mówię o krzywej rzędu czwartego rodzaju zerowego, następnie o krzywych rzędu trzeciego i dalszych degieneracjach dochodzących aż do prostych.

W uzupełnieniu bardzo obszernej literatury odnoszącej się do wymienionych krzywych, a podanej w „Encyklopedie der Mathematischen Wissenschaften“ (Tom III_2, zeszyt 4) podać należy prace: Hegera [1]), Bobeka [2]) i Bindera [3]).

---

[1]) R. Heger, Zur Erzeugung von Curven vierter und dritter Ordnung durch zwei collineare Strahlsysteme. Zeitschrift für Math. u. Phys. XIX. 1874. str. 171.

[2]) K. Bobek, Über ebene rationale Curven vierter Ordnung. Sitzungsberichte d. Akademie d. Wissensch. Wien 1879.

[3]) W. Binder. Über Plancurven vierter Ordnung vom Geschlecht p=1 und ihre typischen Formen. Jahresbericht der Landes-Ober-Realschule in Wiener-Neustadt 1893.

[4]) W. Binder, Theorie der Universalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung. Lipsk 1896.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

a) Uzupełnienie jednokreślnych pęków inwolucyjnych.

1. Weźmy pod uwagę dwa dowolne pęki inwolucyjne o wierzchołkach W i W_1, każdy, jak wiadomo, dany przez dwie pary odpowiednich promieni. Przetnijmy oba pęki dowolnym przekrojem stożkowym C^2, przechodzącym przez ich wierzchołki W i W_1 i oznaczmy punkty przecięcia się promieni aa', bb' pęku W z owym przekrojem stożkowym przez AA', BB', punkty przecięcia się elementów a_1a_1', b_1b_1' pęku W_1 z tymże przekrojem niech będą A_1A_1', B_1B_1' (fig. 1).

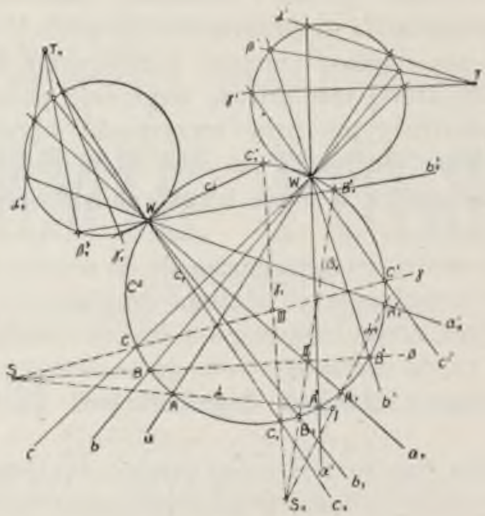


Fig. 1.

Punkty AA', BB' jak również A_1A_1', B_1B_1' tworzą inwolucję punktów na przekroju stożkowym C^2. Proste, łączące punkty $AA'=\alpha$ i $BB'=\beta$, przetną się w punkcie S, który jest środkiem inwolucji punktów $AA'BB'$ na przekroju stożkowym C^2; podobnie otrzymamy punkt S_1 jako środek inwolucji punktów A_1A_1', B_1B_1' na tym samym przekroju stożkowym C^2.

Każdy promień x pęku $S(\alpha, \beta...)$ przecina przekrój stożkowy C^2 w dwuch punktach XX' inwolucji, a punkty te, połączone z wierzchołkiem W, dają parę promieni, uzupełniających pęk inwolucyjny $W(aa',bb'...)$. Analogicznie każdemu promieniowi pęku $S_1(\alpha_1, \beta_1...)$ odpowiadają dwa

punkty na C^2, a więc i para promieni odpowiednich w pęku inwolucyjnym $W(a_1a_1', b_1b_1'\ldots)$.

Załóżmy teraz, że pęki S i S_1 są jednokreślne; wówczas każdemu elementowi pęku S odpowiada jeden określony element w pęku S_1, a w następstwie tego założenia każdej parze promieni w pęku inwolucyjnym W, odpowie jedna, określona para promieni inwolucyjnych w pęku W_1. Pęki W i W_1, związane ze sobą jednokreślnemi pękami S i S_1 nazywać będziemy jednokreślnemi pękami inwolucyjnemi w położeniu ogólnym.

Z powyższego określenia jednokreślnych pęków inwolucyjnych wynika bezpośrednio, że pęki te wówczas będą wyznaczone, gdy ustalona będzie jednokreślność pęków pomocniczych S i S_1. Ponieważ zaś jednokreślne pęki S i S_1 wyznaczone są trzema parami odpowiednich promieni, a każdej z tych par odpowiada czwórka promieni w jednokreślnych pękach inwolucyjnych W i W_1, więc trzy czwórki odpowiednich promieni wyznaczają dwa jednokreślne pęki inwolucyjne.

Jeżeli środki inwolucji S i S_1 leżą zewnątrz przekroju stożkowego C^2, to jednokreślne pęki inwolucyjne W i W_1 są hiperboliczne, jeśli zaś punkty S i S_1 oba leżą wewnątrz przekroju C^2, to inwolucja pęków jednokreślnych W i W_1 jest eliptyczna. Jeden z dwuch pęków inwolucyjnych może być hiperboliczny, drugi zaś eliptyczny. Jeśli środek inwolucji punktów na przekroju stożkowym C^2 leży na tymże przekroju, to mamy przykład pęku inwolucyjnego parabolicznego, który związany być może jednokreślnie z pękiem inwolucyjnym hiperbolicznym lub eliptycznym. Jeżeli wkońcu oba środki S i S_1 leżą na przekroju stożkowym C^2, to oba pęki inwolucyjne są paraboliczne.

Pęki jednokreślne S i S_1 utworzą przekrój stożkowy C_1^2, a zatym: przekrój stożkowy C^2, którego dwa punkty W i W_1 uważamy za wierzchołki dwuch pęków inwolucyjnych, a nadto dowolny drugi przekrój stożkowy C_1^2, z obranemi na nim punktami S i S_1, wyznaczają dwa jednokreślne pęki inwolucyjne.

Stąd też wynika, że gdy dane są dwa jednokreślne pęki inwolucyjne i przekrój C^2, przechodzący przez wierzchołki W i W_1 tych pęków, to przez to samo wyznaczone są pomocnicze i jednokreślne pęki S i S_1, a więc i przekrój stożkowy C_1^2. Ale i odwrotnie, gdy dane są jednokreślne pęki inwolucyjne W i W_1 a także związane z niemi pęki S i S_1, to przez to wyznaczony jest także przekrój stożkowy C^2, przechodzący przez wierzchołki W i W_1 danych jednokreślnych pęków inwolucyjnych.

2. Aby dwa jednokreślne pęki inwolucyjne, dane zapomocą trzech czwórek odpowiednich promieni, uzupełnić, zauważmy, że pęk inwolucyjny wyznaczony jest przez dwie pary odpowiednich promieni, że zatym trzecią parę w każdym z dwuch pęków W i W_1 musimy konstrukcyjnie z poprzedniemi związać. Przyjmijmy więc na płaszczyźnie dwa pęki inwolucyjne, każdy wyznaczony np. przez dwie pary promieni (fig. 1). Przez każdy wierzchołek z osobna prowadzimy dowolny przekrój stożkowy, najdogodniej koło. Znajdziemy środki T, T_1 obu inwolucji, których podstawą są te koła, a przy pomocy tych środków uzupełnimy każdy z pęków o jedną parę promieni. Jeżeli każdej parze promieni w pęku W podporządkujemy jedną parę promieni w pęku W_1, jako poprzedniej odpowiednią, to jednokreślność obu pęków inwolucyjnych jest już ustalona, każdej parze promieni w jednym pęku odpowie jedna jedyna para promieni w pęku drugim.

W celu uzupełnienia obu tych pęków poprowadzimy przez ich wierzchołki W i W_1 dowolny przekrój stożkowy C^2, na którym otrzymamy dwa szeregi inwolucyjne punktów: AA', BB', CC' i A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', jako punkty przecięcia się elementów aa', bb', cc' i a_1a_1', b_1b_1', c_1c_1' pęków W i W_1 z tymże przekrojem. Proste $AA'=\alpha$, $BB'=\beta$, $CC'=\gamma$ przetną się w punkcie S, który jako środek inwolucji szeregu punktów będzie równocześnie wierzchołkiem pęku pomocniczego związanego z pękiem inwolucyjnym W. Proste $A_1A_1'=\alpha_1$, $B_1B_1'=\beta_1$, $C_1C_1'=\gamma_1$ przetną się w środku inwolucji S_1, który będzie wierzchołkiem pęku pomocniczego, związanego z pękiem inwolucyjnym W_1. Jednokreślność pęków S i S_1 wyznaczona jest przez trzy otrzymane pary promieni $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, każdej dalszej parze $\delta\delta_1$ odpowiednich promieni w pękach S i S_1 odpowiedzą dwie pary punktów DD' i D_1D_1' szeregów inwolucyjnych, których spólną podstawą jest przekrój stożkowy C^2. Połączmy punkty D i D' z wierzchołkiem W, zaś punkty D_1 i D_1' z wierzchołkiem W_1, to promienie dd' i d_1d_1' stanowić będą dalsze pary promieni odpowiednich, uzupełniających jednokreślne pęki inwolucyjne W i W_1.

3. Zauważmy, że każdemu elementowi α pęku S $(\alpha, \beta, \gamma...)$ odpowiada jeden promień α' w pęku o wierzchołku T, zaś każdemu promieniowi α_1 w pęku S_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1...)$ odpowiada jeden promień α_1' w pęku o wierzchołku T_1. Ponieważ jednak według założenia pęki: $S(\alpha, \beta, \gamma...)$ i $S_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1...)$ są jednokreślne, więc związek jednokreślności zachodzi między pękami $T(\alpha', \beta', \gamma'...)$ i $T_1(\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'...)$.

Zamiast więc pośrednictwa pęków S i S_1, użyć możemy jednokreślnych pęków T i T_1, przez uzupełnienie których uzupełnimy pęki inwolucyjne W i W_1. Jeżeli przytym przyjmiemy położenie pęków

T i T_1 jako perspektywiczne — to otrzymamy możność uzupełnienia jednokreślnych pęków inwolucyjnych w sposób przejrzysty i prosty.

4. Przekrój stożkowy C_1^2, wyznaczony jednokreślnemi pękami S i S_1, przetnie przekrój stożkowy C^2, przechodzący przez wierzchołki W i W_1, w czterech punktach, z których wszystkie mogą być rzeczywiste lub urojone, albo dwa z nich rzeczywiste, dwa zaś urojone. Każdemu z tych punktów odpowiada jeden promień w pęku W i jeden w pęku W_1. W każdym z tych punktów schodzą się zatym dwa odpowiednie punkty szeregów inwolucyjnych złączonych na spólnej podstawie, którą jest przekrój stożkowy C^2. A więc: dwa szeregi inwolucyjne, których spólną podstawą jest przekrój stożkowy, mają cztery punkty, w których schodzą się po dwa odpowiednie punkty tych szeregów. Punkty te mogą być wszystkie rzeczywiste lub urojone, ale dwa z nich rzeczywiste a dwa urojone.

5. Przetnijmy dane jednokreślne pęki inwolucyjne, związane ze sobą przekrojem C^2, a więc jednokreślnemi pękami o wierzchołkach S i S_1, dowolnym przekrojem stożkowym C_2^2, przechodzącym przez wierzchołki W i W_1 tych pęków i znajdźmy środki S' i S_1' inwolucji punktów powstałych na przekroju stożkowym C_2^2. Każdemu elementowi ζ w pęku S odpowiada jeden jedyny element ζ' w pęku S' zatym, pęki S i S' są jednokreślne. Ale elementowi $SS'=\zeta$ w pęku S odpowiada promień $\zeta'=S'S$, schodzący się z promieniem ζ; pęki tedy S i S' są perspektywiczne. Analogicznie też pęk S_1 będzie perspektywiczny z pękiem S_1'. Ponieważ jednak pęki S i S_1 są jednokreślne, więc nowe, przekrojem C_2^2 utworzone pęki pomocnicze o wierzchołkach S' i S_1', będą również jednokreślne i utworzą przekrój stożkowy C_3^2.

Przez taką zamianę pęków pomocniczych S i S_1 na inne pęki S_1 i S_1' nic się nie zmieniło we wzajemnym położeniu pęków inwolucyjnych W i W_1. W ten sposób wykazaliśmy, że pomocnicze pęki S i S_1 zastąpić można zawsze, bez naruszania wzajemnych położeń jednokreślnych pęków inwolucyjnych, innemi jednokreślnemi pękami pomocniczemi S' i S_1', które związane są z jednokreślnemi pękami inwolucyjnemi przekrojem stożkowym C_2^2, przechodzącym przez wierzchołki W i W_1.

Jeżeli każdemu przekrojowi, przechodzącemu przez wierzchołki W i W_1 dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, odpowiadają dwa jednokreślne pęki pomocnicze, to zapytajmy, kiedy i pod jakiemi założeniami owe pęki pomocnicze będą perspektywiczne.

Elementy pęku $W(aa', bb' ...)$ przecinają się z elementami pęku $W_1(a_1 a_1, 'b_1 b_1' ...)$ w punktach, które oznaczymy: $A=(aa_1)$, $A_1=(a'a_1')$, $B=(bb_1)$ i t. d. Poprowadźmy przekrój stożkowy C_2^2 przez wierzchołki WW_1 a ponadto przez trzy punkty A, A_1, B; przekrojowi temu, jak zre-

sztą każdemu przekrojowi, przechodzącemu przez wierzchołki W i W_1, odpowiedzą dwa pęki pomocnicze, o których wiemy, że są jednokreślne. Wykreślmy promienie odpowiednie tych pęków i znajdźmy środki S' i S_1' inwolucji punktów leżących na przekroju stożkowym C_2^2. Oznaczmy punkty przecięcia się promieni b i b_1' z przekrojem stożkowym C_2^2 przez B' i B_1'; proste $AA_1=\alpha'$ i $BB'=\beta'$ przetną się w punkcie S', który jest środkiem inwolucji punktów AA_1, BB' na podstawie C_2^2. Pęk $W_1(a_1a_1', b_1b_1'...)$ wyznacza na C_2^2 szereg inwolucyjny punktów, którego środek S_1' będzie punktem przecięcia się promieni α_1' i β_1', łączących pary punktów odpowiednich tego szeregu. Otrzymamy więc $\alpha_1'=\alpha'=$ $=(AA_1)$ i $\beta_1'=(BB_1')$, a więc i punkt S_1' leżący na spólnym promieniu $\alpha'=\alpha_1'$. Pęki tedy o wierzchołkach S' i S_1', posiadają spólny promień — są więc perspektywiczne. Oś perspektywiczności tych pęków przejdzie przez punkt B, w którym przecinają się promienie β' i β_1'. Drugim punktem osi perspektywiczności będzie punkt przecięcia się promienia γ', przechodzącego przez punkty C i C', w których elementy c i c' pęku W przecinają przekrój stożkowy C_2^2, z promieniem γ_1', który łączy punkty C_1 i C_1', leżące na C_2^2, a w których elementy c_1 i c_1' przecinają C_2^2.

Widzimy więc, że pomocnicze, jednokreślne pęki S i S_1 zastąpić zawsze można pękami perspektywicznemi, nie zmieniając przez to wzajemnego układu odpowiednich par promieni w pękach inwolucyjnych jednokreślnych. Przez wprowadzenie perspektywicznych pęków pomocniczych uzyskaliśmy znaczne uproszczenie przy uzupełnianiu jednokreślnych pęków inwolucyjnych, dlatego też w konstrukcjach posługiwać się będziemy prawie wyłącznie tą metodą uzupełniania pęków inwolucyjnych.

6. Wiemy, że trzy czwórki odpowiednich promieni wyznaczają jednokreślność dwuch pęków inwolucyjnych i że przez zastosowanie podanych wyżej konstrukcji pęki takie zawsze uzupełnić można. Ten sam sposób uzupełniania zastosujemy we wszystkich tych szczególnych wypadkach, gdzie parom promieni, odpowiednich w jednym pęku, podporządkowano jako odpowiednie promienie podwójne w pęku drugim.

Po za ogólnym wypadkiem, w którym trzem parom promieni aa', bb', cc' tworzących pęk inwolucyjny o wierzchołku W, odpowiadają w pęku W_1 kolejno trzy pary promieni $a_1a_1', b_1b_1', c_1c_1'$, tworzących pęk inwolucyjny z pierwszym jednokreślny, zajść mogą następujące szczególne sposoby wyznaczania dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych:

a) Trzem parom promieni aa', bb', cc', tworzącym pęk inwolucyjny W, odpowiadają kolejno w jednokreślnym z nim inwolucyjnym pęku W_1: promień podwójny c_1 i dwie pary promieni b_1b_1', c_1c_1'.

b) Trzem parom promieni aa', bb', cc', tworzącym pęk inwolucyjny W, odpowiadają kolejno w jednokreślnym z nim inwolucyjnym pęku W_1: promienie podwójne e_1, f_1 i para promieni c_1c_1'.

c) Promieniowi podwójnemu e i dwom parom promieni aa', bb', tworzącym pęk inwolucyjny W, odpowiadają kolejno w jednokreślnym z nim inwolucyjnym pęku W_1: promień podwójny e_1 i dwie pary promieni a_1a_1', b_1b_1'.

d) Promieniom podwójnym e, f i parze promieni aa', tworzącym pęk inwolucyjny W, odpowiadają kolejno w jednokreślnym z nim inwolucyjnym pęku W_1: promienie podwójne e_1, f_1 i para promieni a_1a_1'.

7. Określenie i uzupełnienie dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych oparliśmy na pośrednictwie dwuch jednokreślnych pęków pomocniczych; ten sam cel osiągniemy, jeśli w miejsce dwuch jednokreślnych, względnie perspektywicznych, pęków wprowadzimy dwa pęki jednokreślne i spółśrodkowe.

Przyjmijmy dwa jednokreślne pęki spółśrodkowe, wyznaczone przez trzy pary promieni odpowiednich α, β, γ i α', β', γ' o wierzchołku T, a nadto obierzmy na płaszczyźnie tych pęków, dwa dowolne punkty W i W_1, które uważajmy za wierzchołki dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych. Poprowadźmy przez punkty W i W_1 dowolny przekrój stożkowy C^2 i oznaczmy punkty przecięcia się promieni α, β, γ i α', β', γ' pęków spółśrodkowych z owym przekrojem stożkowym odpowiednio przez AA', BB', CC'; A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'; punkty te tworzą dwa szeregi inwolucyjne. Połączmy punkty AA', BB', CC' promieniami aa', bb', cc' z punktem W, zaś punkty A_1A_1', B_1B_1', CC_1' promieniami a_1a_1', b_1b_1', c_1c_1' z punktem W_1; pęk inwolucyjny $W(aa', bb', cc' ...)$ będzie jednokreślny z pękiem inwolucyjnym $W_1(a_1a_1', b_1b_1', c_1c_1' ...)$. Każdej bowiem parze odpowiednich promieni pęku T odpowiada jedna para promieni w pęku W, a także jedna określona i z poprzednią związana para promieni w pęku W_1.

Jeżeli wierzchołek T pęków spółśrodkowych leży zewnątrz przekroju stożkowego C^2, to jednokreślne pęki inwolucyjne są hiperboliczne. Z punktu T poprowadzić bowiem można w tym wypadku do C^2 dwie rzeczywiste styczne, których punkty styczności E i F są punktami podwójnemi szeregów inwolucyjnych na podstawie C^2. Oba te szeregi punktów mają spólne punkty podwójne, które bynajmniej nie odpowiadają sobie wzajemnie. Punkty E i F połączone z wierzchołkami W i W_1 dają promienie podwójne w jednokreślnych pękach inwolucyjnych.

Jeżeli wierzcholek T leży wewnątrz przekroju stożkowego C^2,

to jednokreślne pęki inwolucyjne W i W_1 są eliptyczne, promienie podwójne w obu pękach są urojone.

W wypadku, gdy wierzchołek T leży na przekroju stożkowym C^2, oba pęki inwolucyjne będą paraboliczne; w punkcie T zejdą się wszystkie cztery punkty podwójne szeregów inwolucyjnych, leżących na C^2.

Jednokreślność pomocniczych pęków spólśrodkowych może być hiperboliczna, eliptyczna lub paraboliczna. W pierwszym wypadku rzeczywiste promienie podwójne tych pęków przecinają przekrój stożkowy C^2 w czterech punktach rzeczywistych lub urojonych, które są spólnemi punktami szeregów inwolucyjnych na C^2. W punktach tych przecinają się też odpowiednie promienie pęków inwolucyjnych W i W_1. Jeśli pęki pomocnicze są eliptyczne, to spólne punkty szeregów inwolucyjnych na C^2 są urojone; w przypadku, gdy pęki spólśrodkowe są paraboliczne, punkty spólne parami schodzą się.

8. Załóżmy w końcu, że pęk T $(\alpha\alpha', \beta\beta'...)$ jest pękiem inwolucyjnym. Element α tego pęku przecina przekrój stożkowy C^2 w punktach A i A', odpowiedni poprzedniemu element α' w punktach A_1 i A_1'. Połączmy punkty AA' z wierzchołkiem W promieniami aa', zaś punkty A_1A_1' z wierzchołkiem W_1 promieniami a_1a_1'; para promieni aa' związana będzie jednokreślnie z parą promieni a_1a_1' w pęku W_1. Uważajmy element α pęku pomocniczego T za promień γ', odpowiedni mu promień γ, zejdzie się z promieniem α, a więc para promieni $\alpha\alpha'$ w inwolucyjnym pęku pomocniczym wyznacza cztery promienie w pęku W i tyleż promieni w jednokreślnym z poprzednim inwolucyjnym pęku W_1. Pozatym do tej formy uzupełniania pęków W i W_1 odnoszą się wszystkie uwagi, zawarte w ustępie poprzednim.

b) Uzupełnienie jednokreślnych szeregów inwolucyjnych.

9. Przyjmijmy dwa szeregi inwolucyjne o podstawach w i w_1, każdy wyznaczony przez dwie pary odpowiednich punktów AA', BB'; A_1A_1', B_1B_1'. Wykreślmy dowolny przekrój stożkowy C^2, styczny do obu podstaw w i w_1 zaś z punktów AA', BB' poprowadźmy styczne aa', bb' do tego przekroju stożkowego, które tym sposobem utworzą pęk inwolucyjny stycznych.

Oznaczmy punkty przecięcia się stycznych aa' i bb' przez I i II; prosta (I II)$=s$ będzie osią inwolucji pęku stycznych aa', bb'. Podobnie styczne $a_1a_1'b_1b_1'$, poprowadzone z punktów A_1A_1', B_1B_1' jako elementów szeregu inwolucyjnego w_1 do przekroju stożkowego C^2, przetną się w punktach I′ II′, które połączone dadzą prostą s_1 jako oś inwolucji

pęku owych stycznych. Z każdegu punktu X szeregu s (I II...) poprowadzić można dwa promienie pęku inwolucyjnego stycznych, które przecinają podstawę w w dwuch punktach, uzupełniających ów szereg inwolucyjny. W ten sam sposób każdemu elementowi podstawy s_1 odpowiadają na podstawie w_1 dwa punkty, tworzące parę odpowiednich punktów inwolucyjnych.

Załóżmy, że szeregi s i s_1 są jednokreślne; wówczas parze punktów szeregu inwolucyjnego w, związanej z pewnym punktem szeregu s odpowie pewna określona, odpowiadająca poprzedniej para punktów w szeregu inwolucyjnym w_1. Szeregi w i w_1, związane ze sobą jednokreślnemi szeregami s i s_1, są j e d n o k r e ś l n e m i szeregami inwolucyjnemi w położeniu ogólnym. Dwa jednokreślne szeregi inwolucyjne wyznaczone są za pomocą trzech czwórek odpowiednich punktów.

Jeżeli oś inwolucji przecina przekrój stożkowy C^2 w dwuch punktach rzeczywistych, to wszystkim punktom tej osi, leżącym „zewnątrz“ C^2, odpowiadają w szeregu inwolucyjnym odnośnej podstawy punkty rzeczywiste, zaś punktom, leżącym na osi „wewnątrz“ przekroju stożkowego C^2, odpowiadają urojone pary punktów w tymże szeregu inwolucyjnym. Punktom MN przecięcia się osi inwolucji z przekrojem stożkowym C^2 odpowiadają punkty podwójne rzeczywiste, jako punkty przecięcia się stycznych, poprowadzonych w punktach M i N do C^2, z podstawą szeregu inwolucyjnego. Otrzymany więc szereg inwolucyjny będzie h i p e r b o l i c z n y. Oś inwolucji przecinająca przekrój stożkowy C^2 w punktach urojonych stwarza na odnośnej podstawie szereg inwolucyjny eliptyczny. Jeżeli w końcu oś inwolucji będzie styczną do C^2, to na odnośnej podstawie otrzymamy szereg inwolucyjny paraboliczny.

W ten sposób oba jednokreślne szeregi inwolucyjne mogą być hiperboliczne, eliptyczne, paraboliczne, lub jeden z nich hiperboliczny, drugi eliptyczny, a wreszcie jeden z dwuch szeregów może być paraboliczny, drugi eliptyczny lub hiperboliczny.

Jednokreślne szeregi pomocnicze s i s_1 utworzą przekrój stożkowy C_1^2. Jeżeli dany jest przekrój stożkowy C^2 i dwie jego styczne w i w_1, jako podstawy jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, a nadto gdy dany jest drugi przekrój stożkowy C_1^2, którego dwie styczne s i s_1 uważamy za podstawy szeregów jednokreślnych, to jednokreślność szeregów inwolucyjnych w i w_1 jest w ten sposób w zupełności wyznaczona.

10. Założeniu i uzupełnieniu dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych za pomocą jednokreślnych, spółśrodkowych pęków pomocniczych odpowiada na podstawie biegunowej dwoistości założenie i uzu-

pełnienie jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, przez użycie pomocniczych jednokreślnych szeregów, złączonych na spólnej podstawie t.

Przyjmijmy dwie proste w i w_1 za podstawy jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, a nadto prostą t, na której wyznaczone są za pomocą trzech par I I', II II', III III' dwa jednokreślne szeregi punktów. Poprowadźmy dowolny przekrój stożkowy C^2 styczny do prostych w i w_1 a z punktów I, II, III, styczne do tego przekroju stożkowego. Styczne te przetną prostą w punktach AA', BB', CC' szeregu inwolucyjnego, styczne zaś, wyprowadzone z punktów I', II' III' do C^2, przetną podstawę w_1 również w trzech parach punktów szeregu inwolucyjnego.

Ponieważ każdej parze odpowiednich punktów w szeregu t odpowiada jedna para punktów w szeregu inwolucyjnym w i jedna para promieni w inwolucyjnym szeregu w_1, więc szeregi te są jednokreślne.

Jeżeli podstawa t pomocniczych szeregów spółśrodkowych przecina przekrój stożkowy C^2 w dwuch punktach rzeczywistych, to szeregi inwolucyjne w i w_1 są hiperboliczne. Jeżeli prosta t przecina C^2 w punktach urojonych, to szeregi w i w_1 są eliptyczne. Gdy prosta t jest styczna do przekroju stożkowego C^2 szeregi w i w_1 są paraboliczne.

11. Niechaj pomocniczy szereg o podstawie t będzie szeregiem inwolucyjnym. Uzupełnienie jednokreślnych szeregów inwolucyjnych na podstawach w i w_1 uskutecznimy w sposób, wskazany w ustępie poprzednim (10). Z zamienności elementów szeregu inwolucyjnego t wynika, że każdemu punktowi tego szeregu odpowiadają dwa punkty na podstawie w i dwa punkty na podstawie w_1. Parze więc punktów szeregu t odpowiadają cztery punkty szeregu inwolucyjnego w i tyleż punktów w szeregu w_1.

CZĘŚĆ DRUGA.

a) Krzywe rzędu czwartego rodzaju pierwszego, oraz krzywe klasy czwartej tego samego rodzaju.

1. Każda para promieni pęku W przetnie się z odpowiednią parą promieni pęku W_1 w czterech punktach; wszystkie otrzymane tą drogą punkty utworzą pewną krzywą, której badaniem zajmiemy się poniżej.

Określmy przedewszystkim rząd otrzymanej krzywej. W tym celu przetnijmy oba pęki inwolucyjne, tworzące tę krzywą, dowolną prostą p, nie przechodzącą przez wierzchołki tych pęków. Na prostej p

otrzymamy złączone dwa szeregi inwolucyjne. Przyjmijmy dowolny przekrój stożkowy K^2, a z punktu M, leżącego na nim, rzućmy szeregi inwolucyjne, leżące na podstawie p, na ów przekrój. W ten sposób przeniesiemy szeregi inwolucyjne p na przekrój stożkowy K^2. Znajdźmy środki inwolucji obu tych szeregów, których podstawą jest przekrój stożkowy K^2; punkty te M_1 i M_2 będą wierzchołkami pęków jednokreślnych, których odpowiednie promienie przetną się w punktach, leżących na przekroju stożkowym K_1^2. Przekroje stożkowe K^2 i K_1^2 przetną się w czterech punktach E, F, G, H, z których wszystkie mogą być rzeczywiste lub urojone, albo dwa z nich rzeczywiste, a dwa urojone. Rzućmy owe punkty z wierzchołka M na prostą p; punkty te są punktami przecięcia odpowiednich promieni obu pęków, leżącemi na prostej p.

Utworem dwuch pęków inwolucyjnych jednokreślnych jest krzywa rzędu czwartego C^4.

Utworem dwuch szeregów inwolucyjnych jednokreślnych jest krzywa klasy czwartej C_4.

2. Punkty W i W_1, a więc wierzchołki jednokreślnych pęków inwolucyjnych, będą punktami podwójnemi krzywej C^4, co wynika z następującego rozważania. Promieniowi t w pęku S, przechodzącemu przez punkt W_1, odpowiada w pęku S_1 promień t_1. Promień t przecina przekrój stożkowy C^2, przechodzący przez wierzchołki W i W_1 pęków inwolucyjnych, prócz w punkcie W_1 jeszcze w punkcie T; promienie tedy $WW_1=p$ i $WT=p'$ stanowią parę promieni odpowiednich w pęku W (fig. 2). Promień t_1 przecina przekrój stożkowy C^2 w punktach T_1 i T_2, które, połączone z wierzchołkiem, W_1 dadzą parę promieni $p_1 p_1'$ w pęku W_1, odpowiadającą jednokreślnie promieniom pp' w pęku W. Obie pary promieni przetną się w czterech punktach, z których dwa, a w szczególności punkty I i II przecięcia się promieni p i p_1, p i p_1' schodzą się w punkcie W_1. Dwa dalsze punkty III i IV leżą na promieniu p'. Punkt zatym W_1 jest punktem podwójnym krzywej C^4. W ten sam sposób wykażemy, że i punkt W jest punktem podwójnym naszej krzywej.

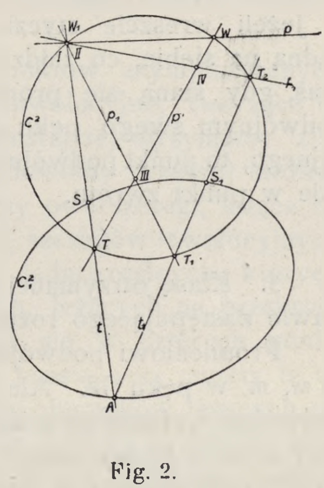


Fig. 2.

Krzywa rzędu czwartego, jako utwór dwuch jednokreślnych inwolucyjnych pęków promieni, posiada w ogólnym wypadku dwa punkty podwójne.

Krzywa klasy czwartej, jako utwór dwuch jednokreślnych, inwolucyjnych szeregów punktów, posiada w ogólnym wypadku dwie styczne podwójne.

W dalszym ciągu zauważmy, że:

Promieniowi, łączącemu wierzchołki jednokreślnych pęków inwolucyjnych, uważanemu za element jednego pęku, odpowiada w pęku drugim para promieni, które są stycznemi krzywej w jej punkcie podwójnym.

Jeżeli owa para stycznych jest rzeczywista, to punkt, przez który przechodzi, jest właściwym punktem podwójnym krzywej.

Jeżeli styczne te są urojone, to odnośny punkt podwójny jest punktem odosobnionym.

Jeżeli wreszcie styczne owe padną na siebie, co zajdzie wówczas, gdy staną się promieniem podwójnym swego pęku inwolucyjnego, to punkt podwójny przejdzie w punkt zwrotu.

Punktowi przecięcia się podstaw jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, uważanemu za element jednego szeregu, odpowiada w szeregu drugim para punktów, które są punktami styczności krzywej, leżącemi na podstawie tego szeregu.

Jeżeli owe punkty styczności są rzeczywiste, to prosta, na której leżą, jest właściwą styczną podwójną krzywej.

Jeżeli punkty styczności są urojone, to odnośna styczna podwójna jest odosobniona.

Jeżeli w końcu owe punkty styczności zejdą się, co zajdzie wówczas, gdy staną się punktem podwójnym swego szeregu inwolucyjnego, to styczna podwójna przejdzie w styczną przegięcia.

3. Klasę otrzymanej krzywej C^4 oznaczymy bezpośrednio na podstawie następującego rozumowania.

Promieniowi podwójnemu e_1 w pęku W_1 odpowiada para promieni m, m' w pęku W. Ale promienie m i m', jako przecinające promień podwójny e_1, łączą dwa bezpośrednio po sobie następujące punkty krzywej, są więc jej stycznemi. Analogicznie, drugiemu promieniowi f_1 w pęku W_1 odpowiadają w pęku W dwa promienie n i n', które będą również stycznemi krzywej C^4. Promieniowi WW_1 należącemu do pęku W_1 odpowiada w pęku W para promieni, które również będą stycznemi naszej krzywej. W końcu sama prosta WW_1 będzie styczna do krzy-

wej C^4, która to styczna, jako łącząca punkty podwójne, będzie styczną podwójną. W ten więc sposób z punktu W poprowadzić można osiem stycznych do krzywej, która tym sposobem jest krzywą klasy ósmej. Z równań Plückera wynika, że krzywa C_8^4 z dwoma punktami podwójnemi posiada dwanaście punktów przegięcia i osiem stycznych podwójnych; krzywa zaś C_4^8 z dwiema stycznemi podwójnemi ma dwanaście punktów zwrotu i osiem punktów podwójnych. Z dwuch punktów podwójnych WW_1 krzywej C_8^4 jeden lub dwa mogą być izolowane. Wreszcie, jeden lub też oba punkty podwójne mogą przejść w punkty zwrotu. Odpowiednio do tego zmienia się klasa krzywej C_8^4. Wiadomo, że punkt zwrotu zniża klasę krzywej o trzy jednostki; stąd:

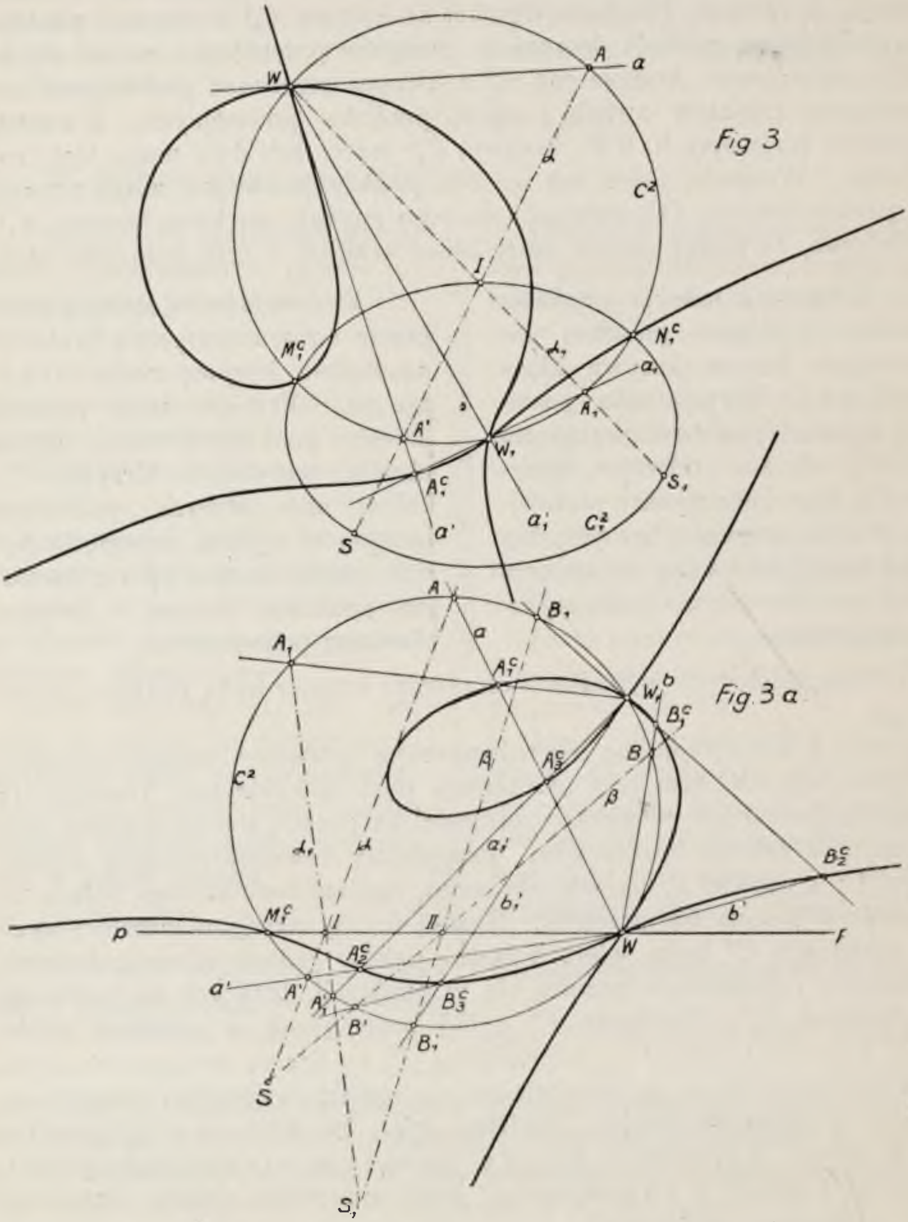
Krzywa z jednym punktem zwrotu i z jednym punktem podwójnym będzie krzywą klasy s i ó d m e j. Krzywa taka posiada dziesięć punktów przegięcia i cztery styczne podwójne. Krzywa C^4, której oba punkty podwójne przejdą w punkty zwrotu, będzie klasy s z ó s t e j z ośmioma punktami przegięcia i jedną styczną podwójną.

Krzywa z jedną styczną przegięcia i z jedną styczną podwójną będzie krzywą rzędu s i ó d m e g o. Krzywa taka posiada dziesięć punktów zwrotu i cztery punkty podwójne. Krzywa C_4, której obie styczne podwójne przejdą w styczne przegięcia będzie rzędu s z ó s t e g o z ośmioma punktami zwrotu i jednym punktem podwójnym.

We wszystkich tych wypadkach otrzymane krzywe będą rodzaju pierwszego.

4. Z kolei zajmijmy się rozważaniem punktów asymptotycznych krzywej C_8^4. W tym celu przetnijmy pęki inwolucyjne, tworzące tę krzywą, prostą $p\infty$ w nieskończoności; na prostej tej otrzymamy złączone dwa szeregi inwolucyjne. Przyjmijmy dowolny przekrój stożkowy C^2 i z punktu P, na nim obranego, rzućmy owe szeregi, leżące na podstawie $p\infty$, na ów przekrój. Środki S i S_1 szeregów inwolucyjnych na podstawie C^2 będą wierzchołkami pęków jednokreślnych, których promienie odpowiednie przetną się w punktach, leżących na przekroju stożkowym C_1^2. Przekroje C^2 i C_1^2 przetną się w czterech punktach. Rzućmy te punkty z wierzchołka P na prostą $p\infty$; punkty te są punktami przecięcia się odpowiednich promieni obu pęków, leżących na prostej w nieskończoności. Widzimy więc, że k r z y w a C_8^4 p o s i a d a ć m o ż e n a j w y ż e j c z t e r y p u n k t y w n i e s k o ń c z o n o ś c i, a w i ę c i c z t e r y a s y m p t o t y. Jeżeli wszystkie punkty przecięcia się przekrojów stożkowych C^2 i C_1^2 są urojone, to krzywa nie posiada żadnych punktów asymptotycznych, a zatem i żadnej asymptoty, jest

więc krzywą rzędu czwartego e l i p t y c z n ą. Jeżeli przekroje stożkowe C^2 i C_1^2 posiadają cztery punkty spólne rzeczywiste, to krzywa rozciąga się w czterech kierunkach do nieskończoności, posiada też



cztery asymptoty; gdy dwa z tych spólnych punktów przekrojów stożkowych C^2 i C_1^2 są urojone, to krzywa C_8^4 posiada dwa punkty asym-

ptotyczne i dwie asymptoty. W obu tych wypadkach krzywa rzędu czwartego jest h i p e r b o l i c z n a. Zdarzyć się w końcu może, że przekroje stożkowe C^2 i C_1^2 stykają się, a styczność ta może być pojedyń-

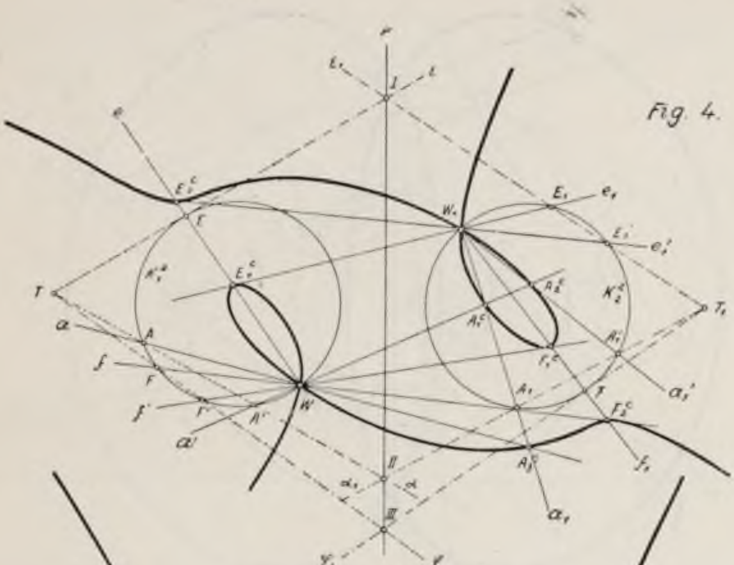


Fig. 4.

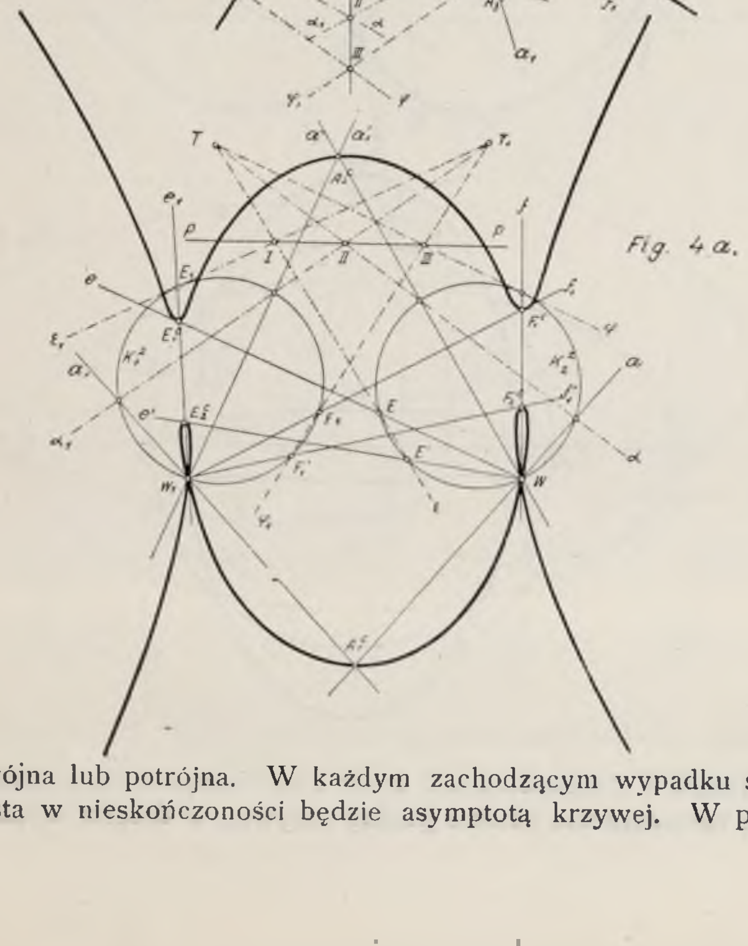


Fig. 4 a.

cza, podwójna lub potrójna. W każdym zachodzącym wypadku styczności prosta w nieskończoności będzie asymptotą krzywej. W pierw-

szym wypadku będzie to asymptota pojedyńcza, w drugim podwójna a wkońcu potrójna czyli innemi słowy: w pierwszym wypadku asym-

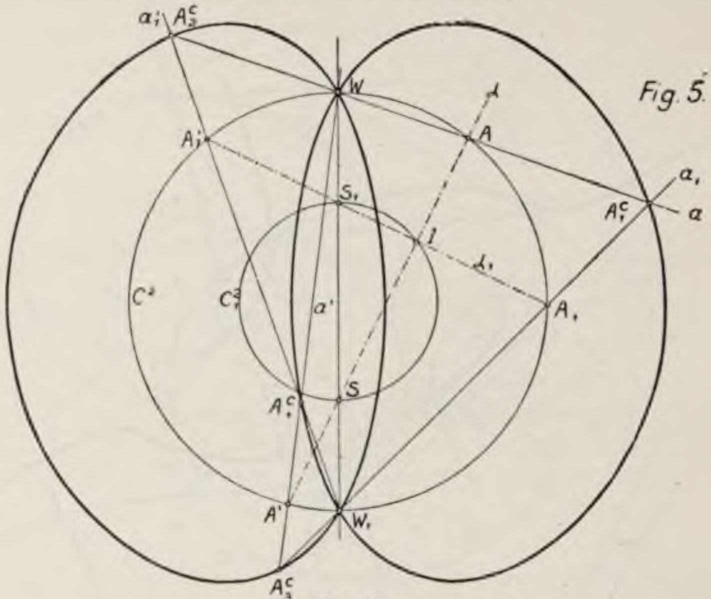


Fig. 5.

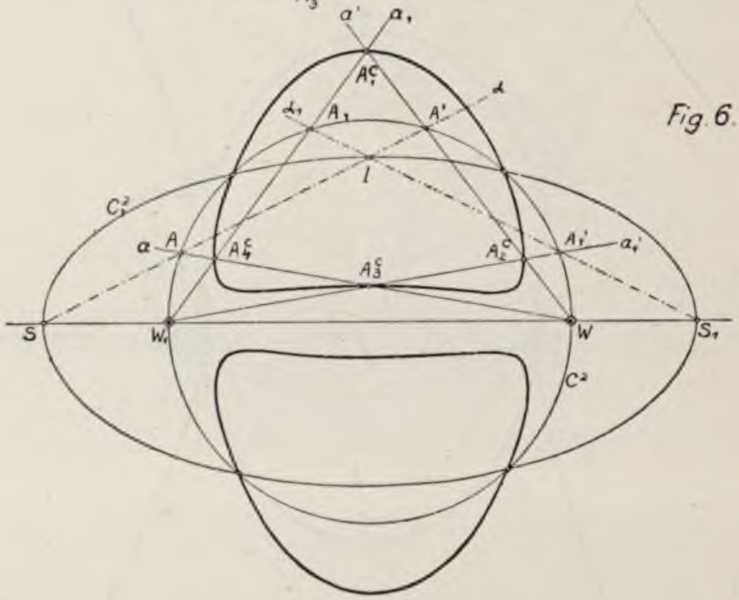


Fig. 6.

ptota, leżąca w nieskończoności, łączy dwa bezpośrednio po sobie następujące, nieskończenie dalekie punkty krzywej, w drugim wypadku leżą

na asymptocie trzy, a w ostatnim cztery bezpośrednio po sobie następujące punkty krzywej C_8^4, która w tych trzech wypadkach nazywa się krzywą p a r a b o l i c z n ą.

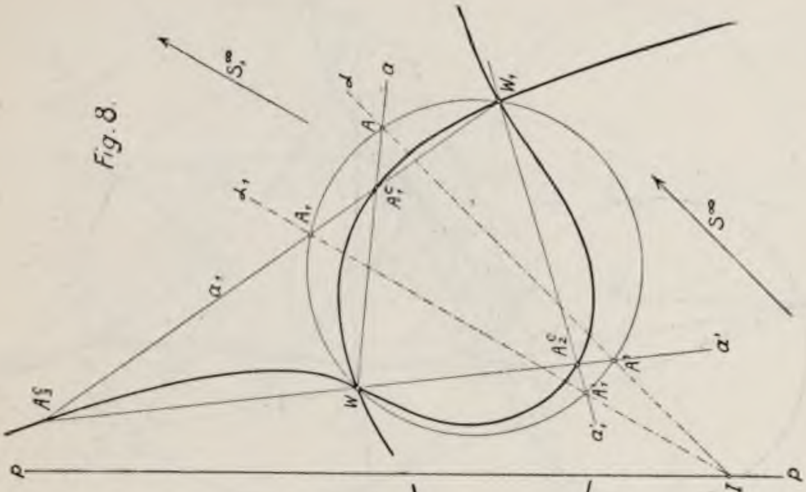


Fig. 8.

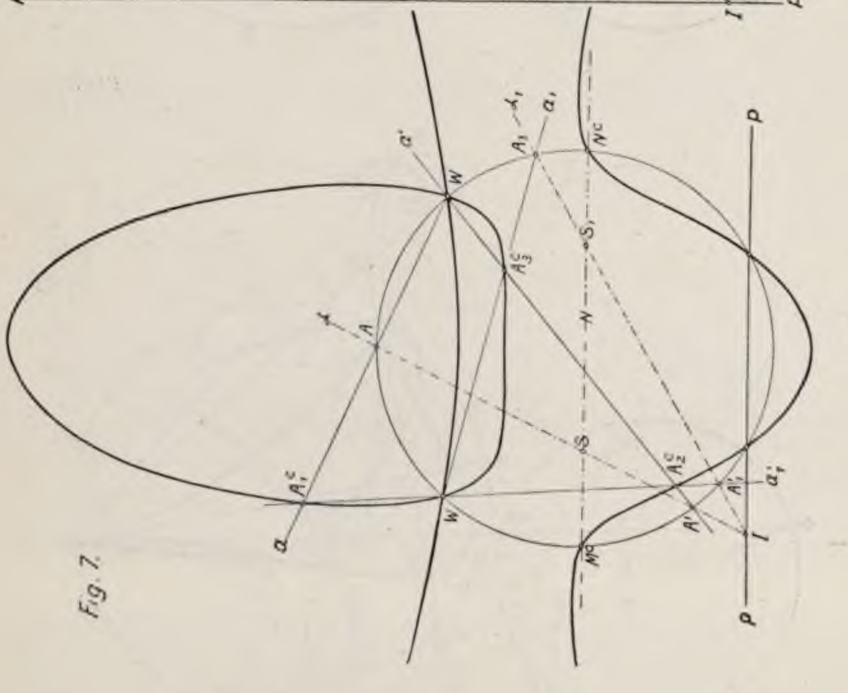


Fig. 7.

5. Krzywa C^4 wyznaczona jest zapomocą $\frac{1}{2}n(n+3)=14$ punktów. Ponieważ jeden punkt podwójny liczyć należy za trzy pojedyncze wa-

runki, więc przy danych punktach podwójnych W i W_1 potrzeba do zupełnego wyznaczenia krzywej C^4 osiem dalszych punktów pojedyń-

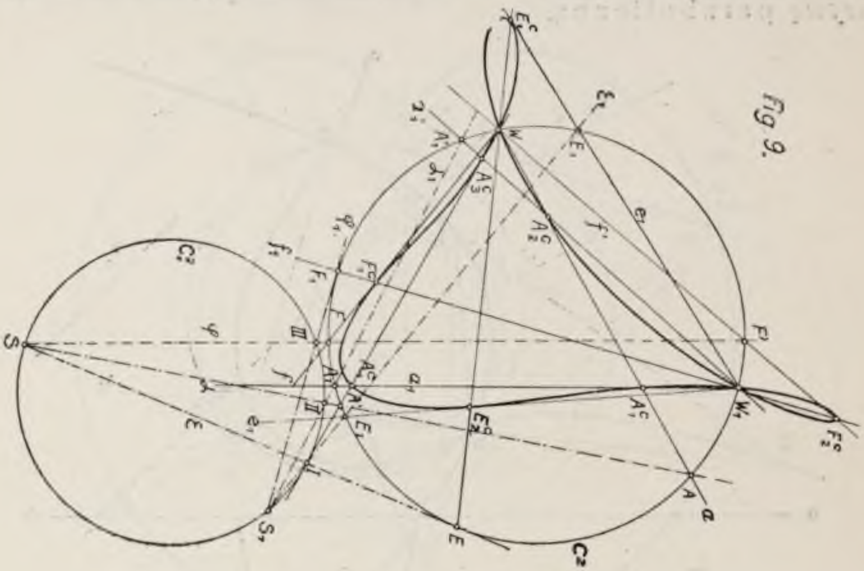


Fig. 9.

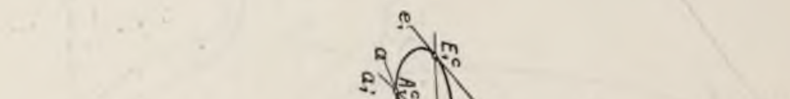


Fig. 10.

czych, zaś do wyznaczenia krzywej C_4^8 prócz dwuch stycznych podwójnych jeszcze osiem dalszych stycznych zwyczajnych.

6. Kilka kształtów omawianych tu krzywych podają załączone rysunki.

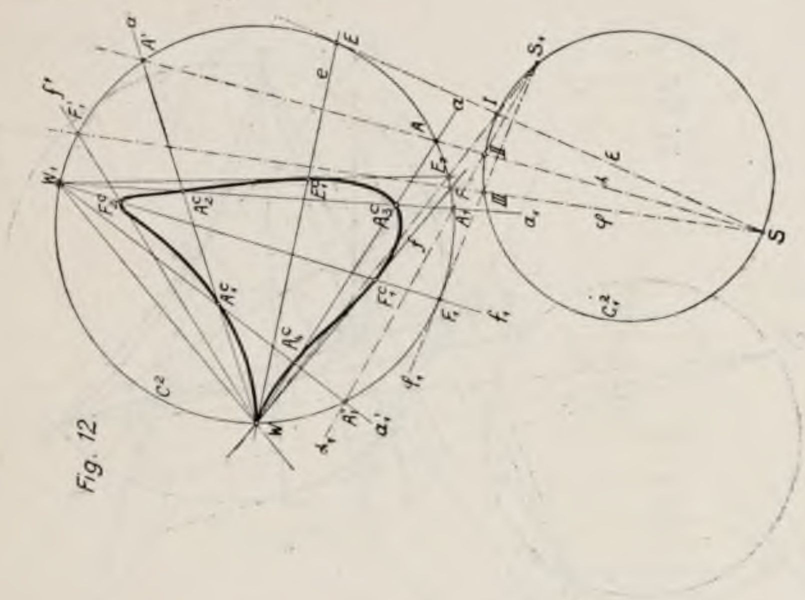


Fig. 12.

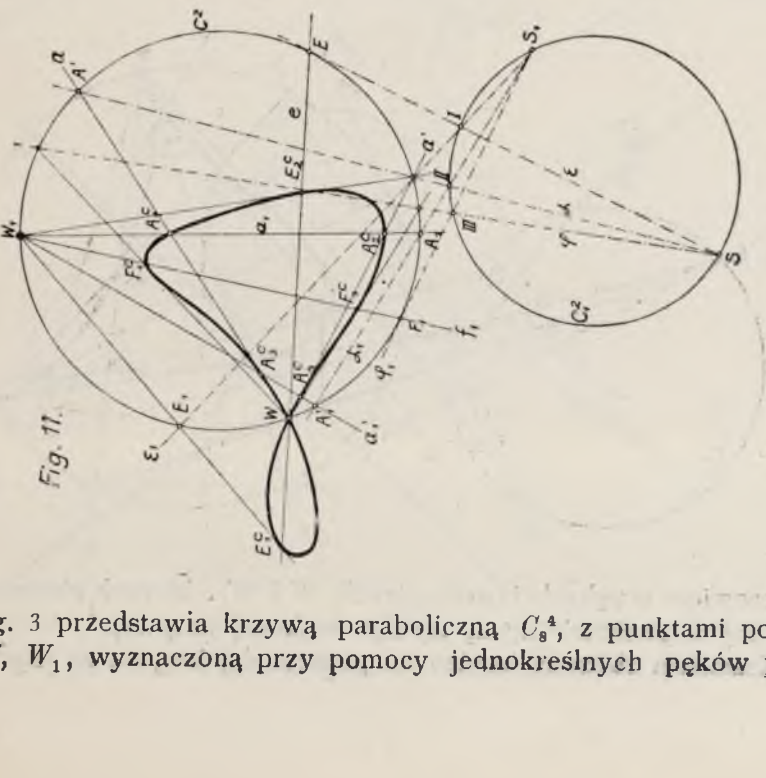


Fig. 11.

Fig. 3 przedstawia krzywą paraboliczną C_8^4, z punktami podwójnemi W, W_1, wyznaczoną przy pomocy jednokreślnych pęków pomo-

cniczych o wierzchołkach S i S_1, tworzących przekrój stożkowy C_1^2. Parze odpowiednich elementów α, α_1 w pękach S, S_1 odpowiadają dwie

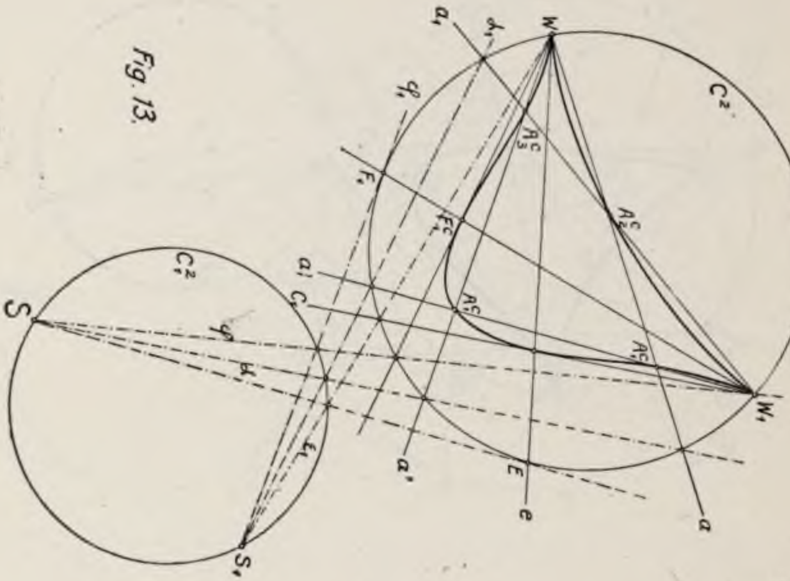


Fig. 13.

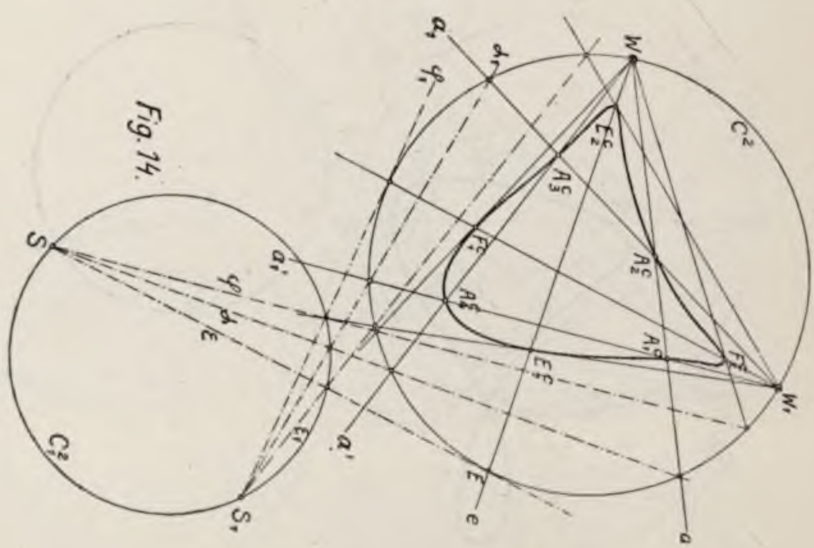


Fig. 14.

pary promieni w pękach inwolucyjnych W i W_1, których elementy przecinają się w punktach A_1^c A_2^c A_3^c A_4^c szukanej krzywej.

Kształtem zbliżona bardzo do poprzedniej krzywa na fig. 3a wy-

znaczona jest przy pomocy pęków pomocniczych $S(\alpha, \beta ..)$ i $S_1(\alpha_1, \beta_1 ...)$, które są w położeniu perspektywicznym. Osią perspektywiczności tych

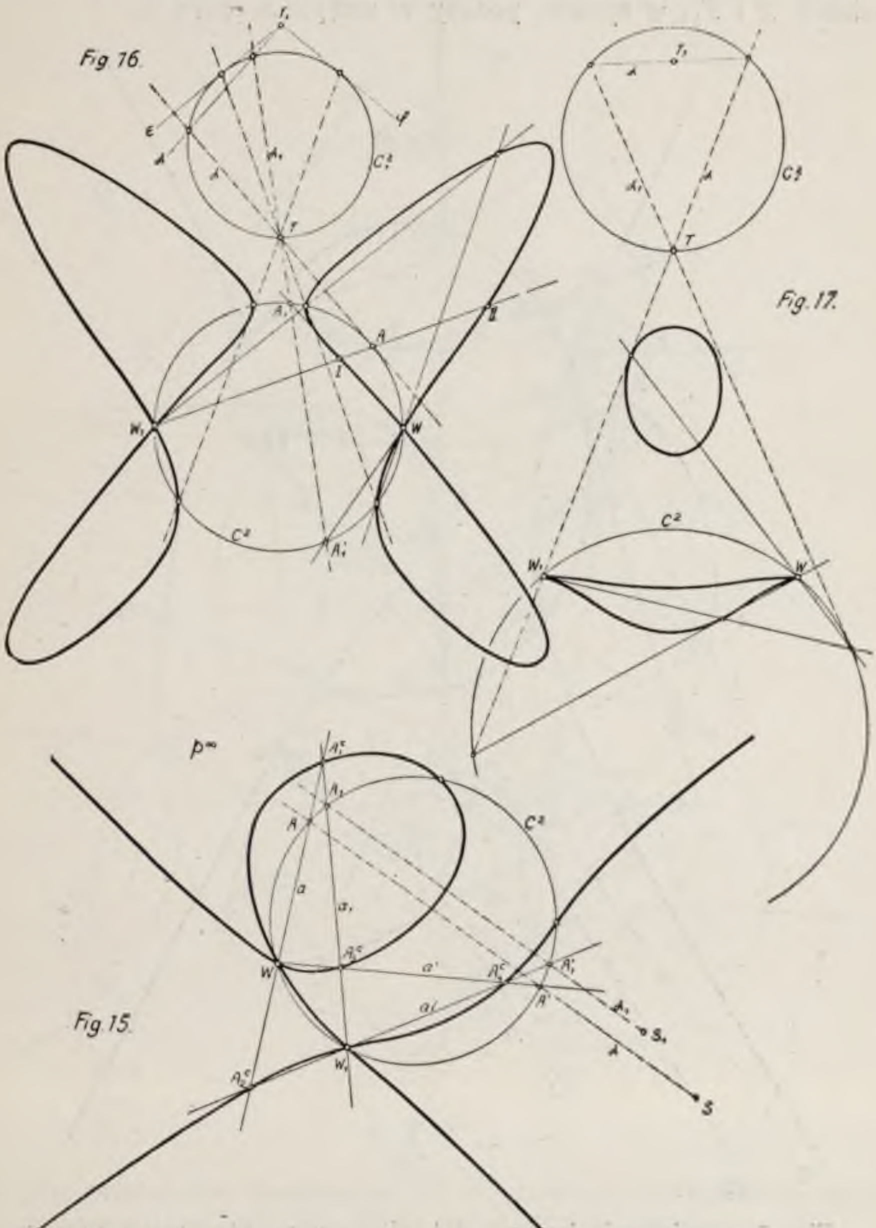


Fig 16.

Fig. 17.

Fig. 15.

pęków jest prosta p. W obu wypadkach pęki inwolucyjne, tworzące krzywą, są pękami hiperbolicznemi.

Fig. 4 i 4a podają krzywe C^4 z dwoma punktami podwójnemi, przyczym pęki inwolucyjne W i W_1 związane są ze sobą pękami o wierzchołkach T i T_1, w sposób, podany w ustępie 3 części I.

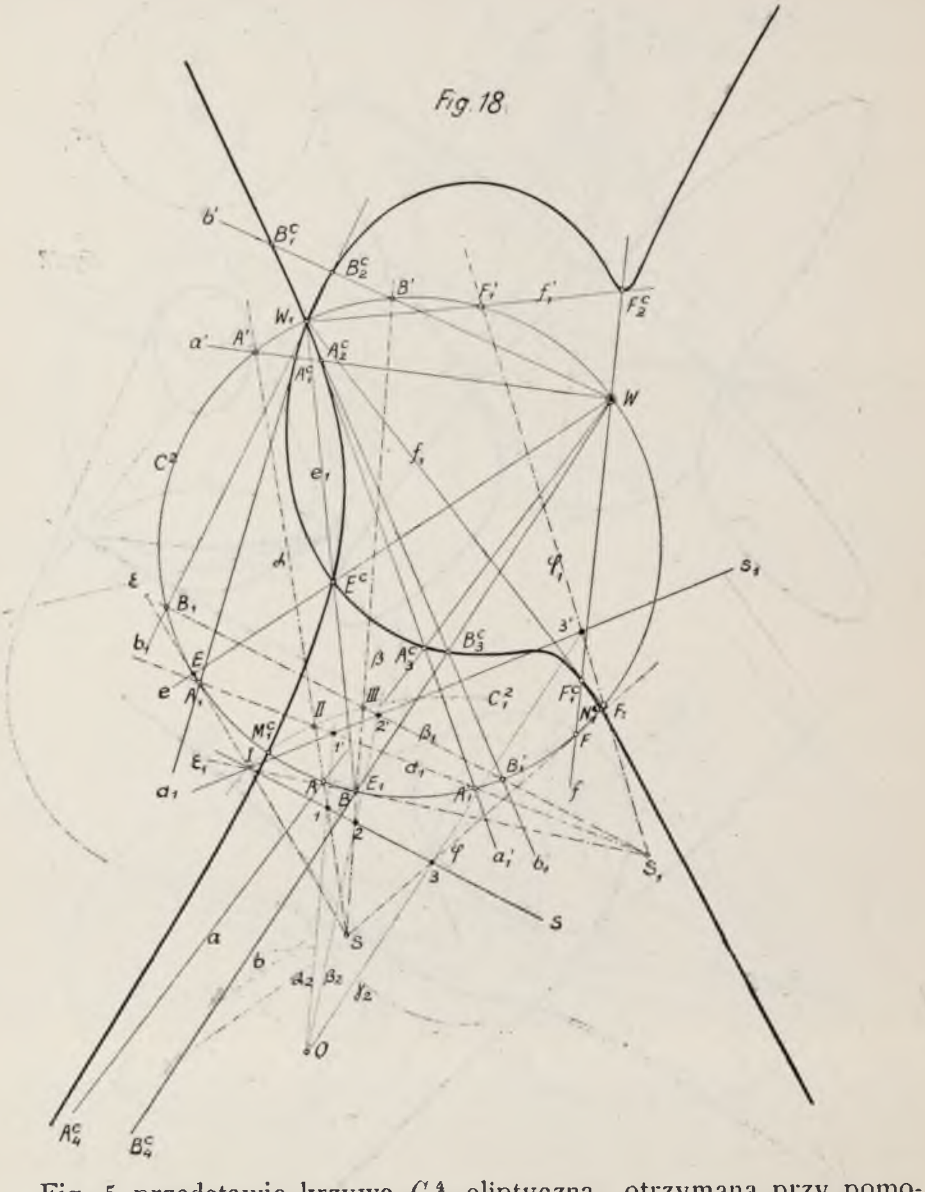


Fig. 5 przedstawia krzywą C_8^4, eliptyczną, otrzymaną przy pomocy jednokreślnych pęków pomocniczych S, S_1, przyczym pęki inwolucyjne o wierzchołkach W, W_1 są eliptyczne.

Fig. 6 wyraża również krzywą eliptyczną z odosobnionemi punktami podwójnemi W, W_1. Jednokreślność pęków pomocniczych wyra-

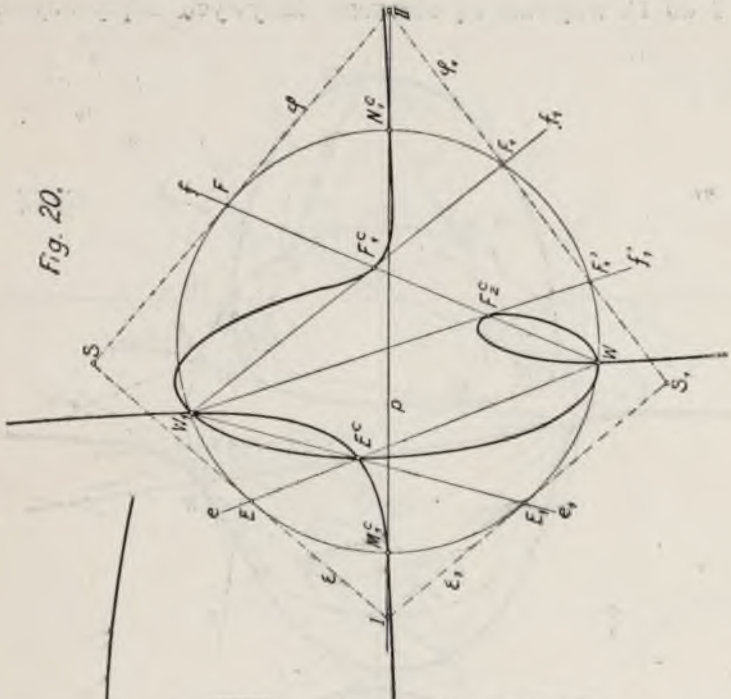


Fig. 20.

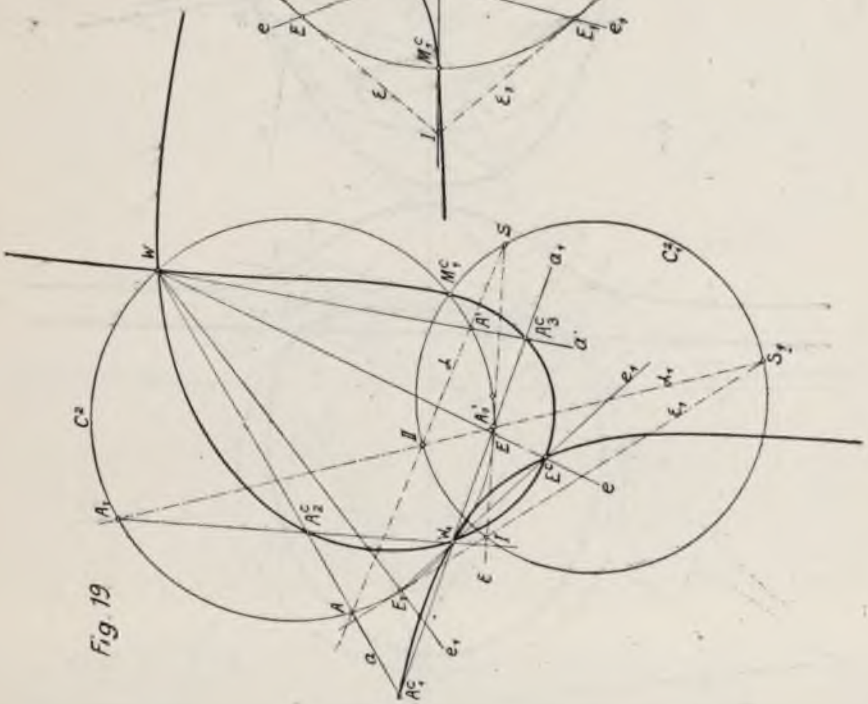


Fig 19

żona jest przekrojem stożkowym C_1^2, a położenie wierzchołków owych pęków dowodzi, że pęki W, W_1 są hiperbolicznie inwolucyjne.

Fig. 7 i 8 dają krzywe C^4 hiperboliczne z dwoma punktami podwójnemi. Jednokreślne pęki inwolucyjne, tworzące pierwszą z nich,

są eliptyczne, w drugiej hiperboliczne. Pęki pomocnicze, w obu wypadkach perspektywiczne, mają prostą p za oś perspektywiczności.

Fig. 9 do 14 włącznie są obrazami krzywych eliptycznych, przy-

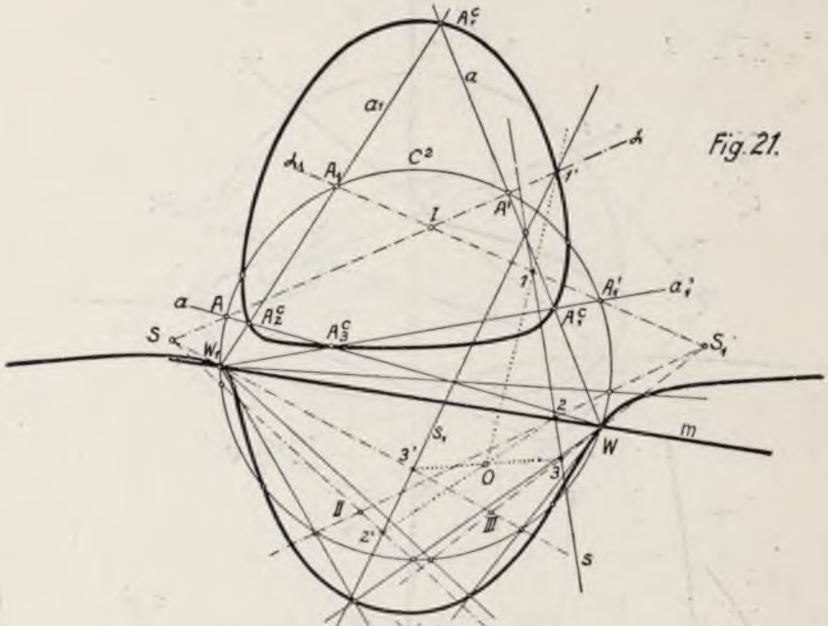


Fig. 21.

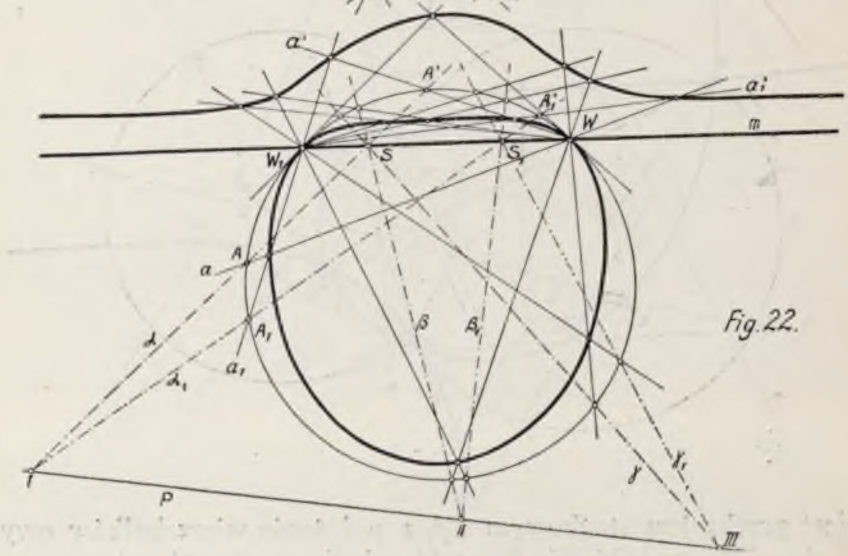
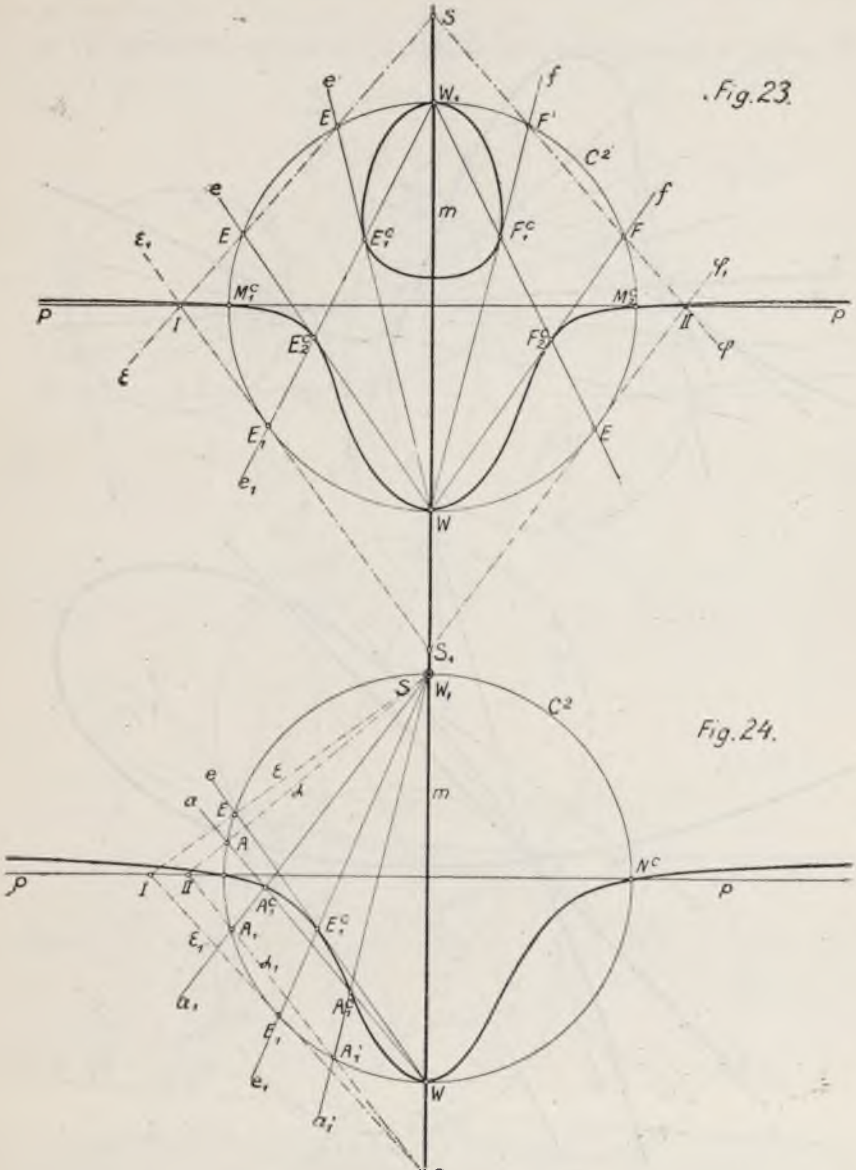


Fig. 22.

czym jeden lub oba punkty podwójne przechodzą w punkty zwrotu, lub stają się punktami podwójnemi odosobnionemi.

W fig. 15 oś perspektywiczności pęków pomocniczych leży w nieskończoności.



Wreszcie fig. 16 i 17 przedstawiają krzywe, do wyznaczenia których użyto jako pęków pomocniczych pęku inwolucyjnego $T(\alpha, \alpha_1 ...)$. W pierwszym wypadku pęk ten jest hiperboliczny, w drugim eliptyczny.

Dla uproszczenia konstrukcji przyjęto we wszystkich wypadkach koło jako przekrój stożkowy C^2, przechodzący przez wierzchołki W

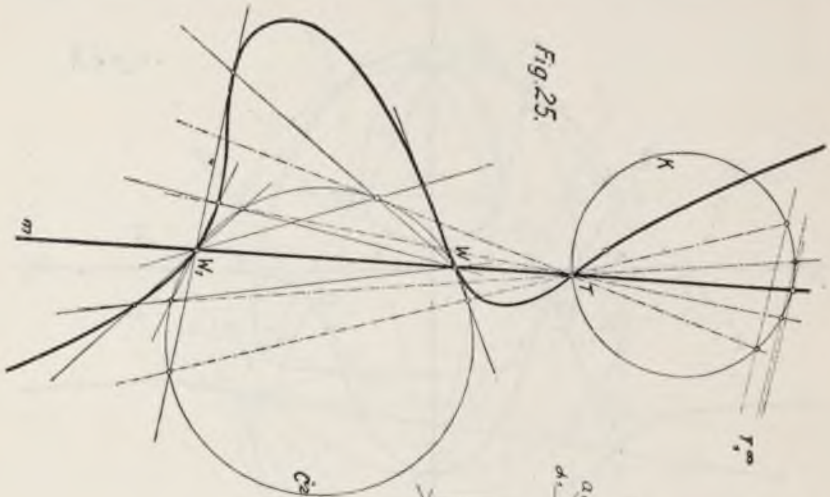


Fig. 25.

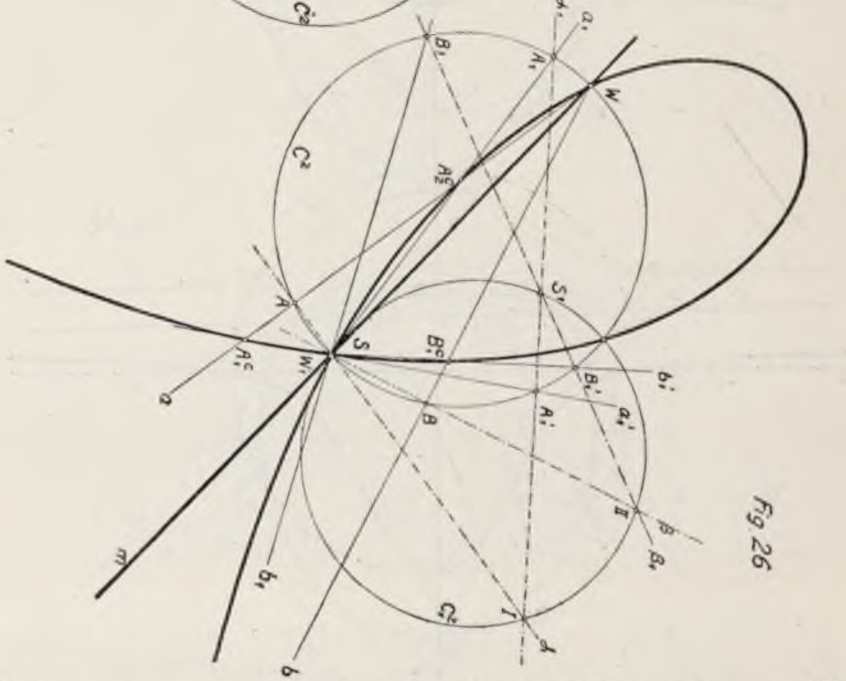
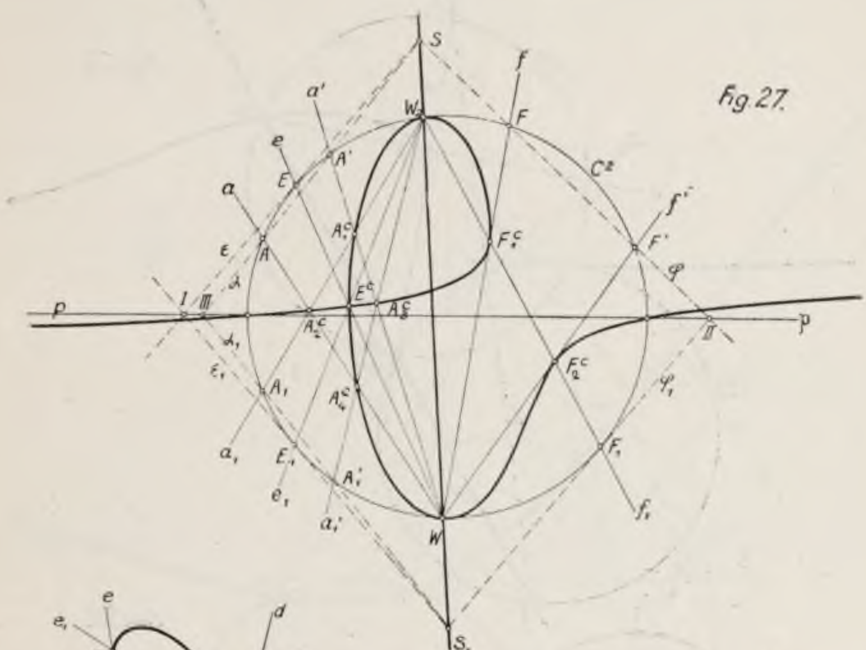


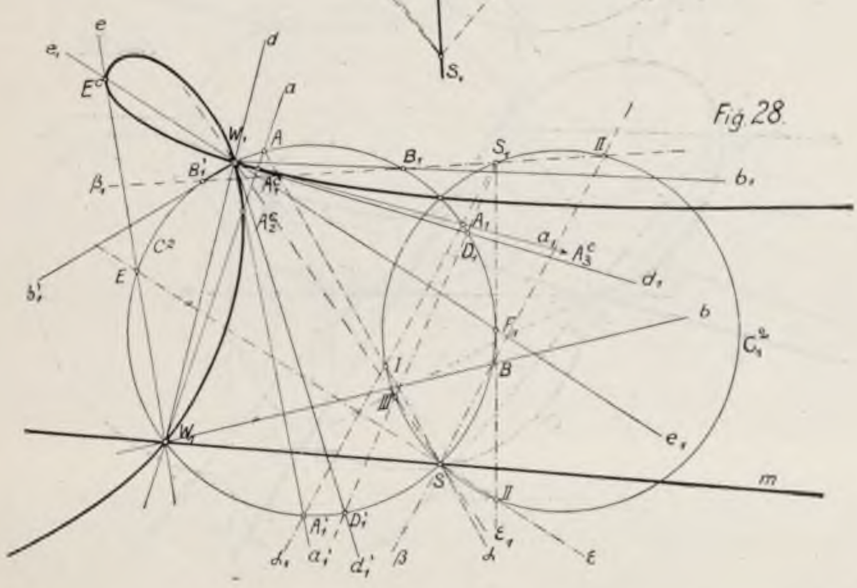
Fig. 26

i W_1 jednokreślnych pęków inwolucyjnych. Użycie paraboli lub hiperboli, jako przekroju stożkowego C^2, pozwoli otrzymać krzywą C^4, której jeden lub oba punkty podwójne znajdują się w nieskończoności.

b) Krzywe rzędu czwartego rodzaju zerowego oraz klasy czwartej tego samego rodzaju.

7. W ogólnym wypadku promieniowi podwójnemu w pęku W od-





powiada para promieni w pęku W_1 i odwrotnie, każdemu promieniowi podwójnemu w pęku W_1 odpowiada para promieni w pęku W.

Przyjmijmy przekrój stożkowy C^2, a na nim punkty W i W_1 jako wierzchołki jednokreślnych pęków inwolucyjnych fig. 18. Dwa dowol-

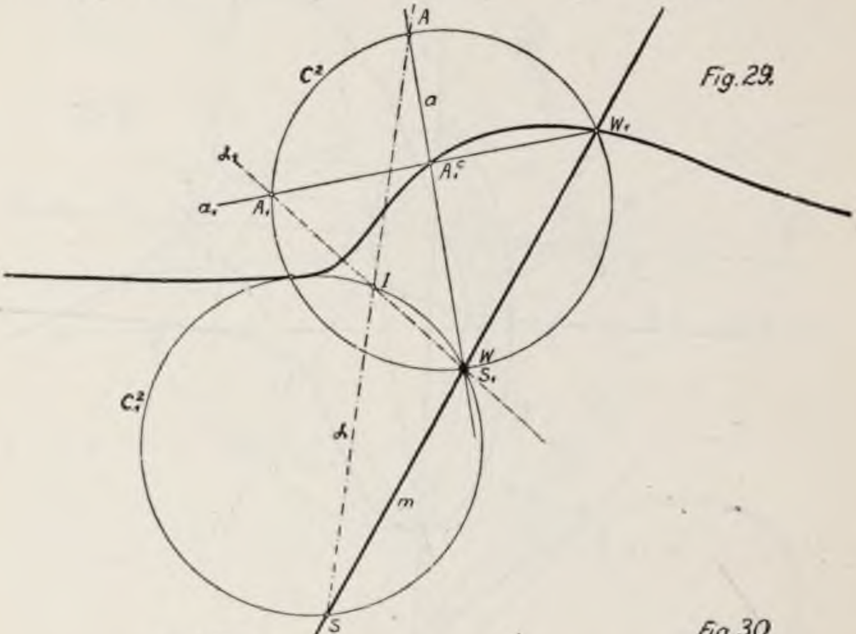


Fig. 29.

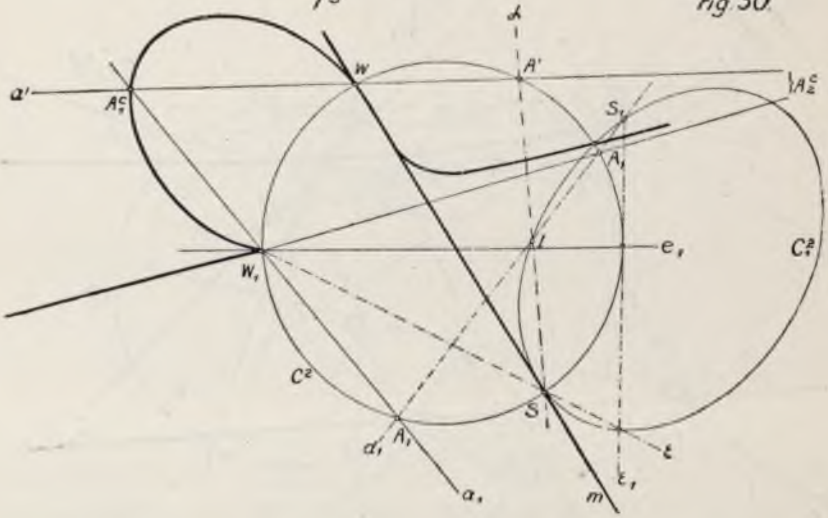


Fig. 30.

ne punkty S i S_1 uważajmy za wierzchołki jednokreślnych pęków pomocniczych. Stycznej ε, poprowadzonej z punktu S do C^2 niechaj od-

powiada w drugim pęku pomocniczym styczna ε_1, wyprowadzona z punktu S_1 do C^2; dalsze dwa promienie α i β w pęku S i odpowiednie im promienie α_1 i β_1 w pęku S_1 obierzmy dowolnie.

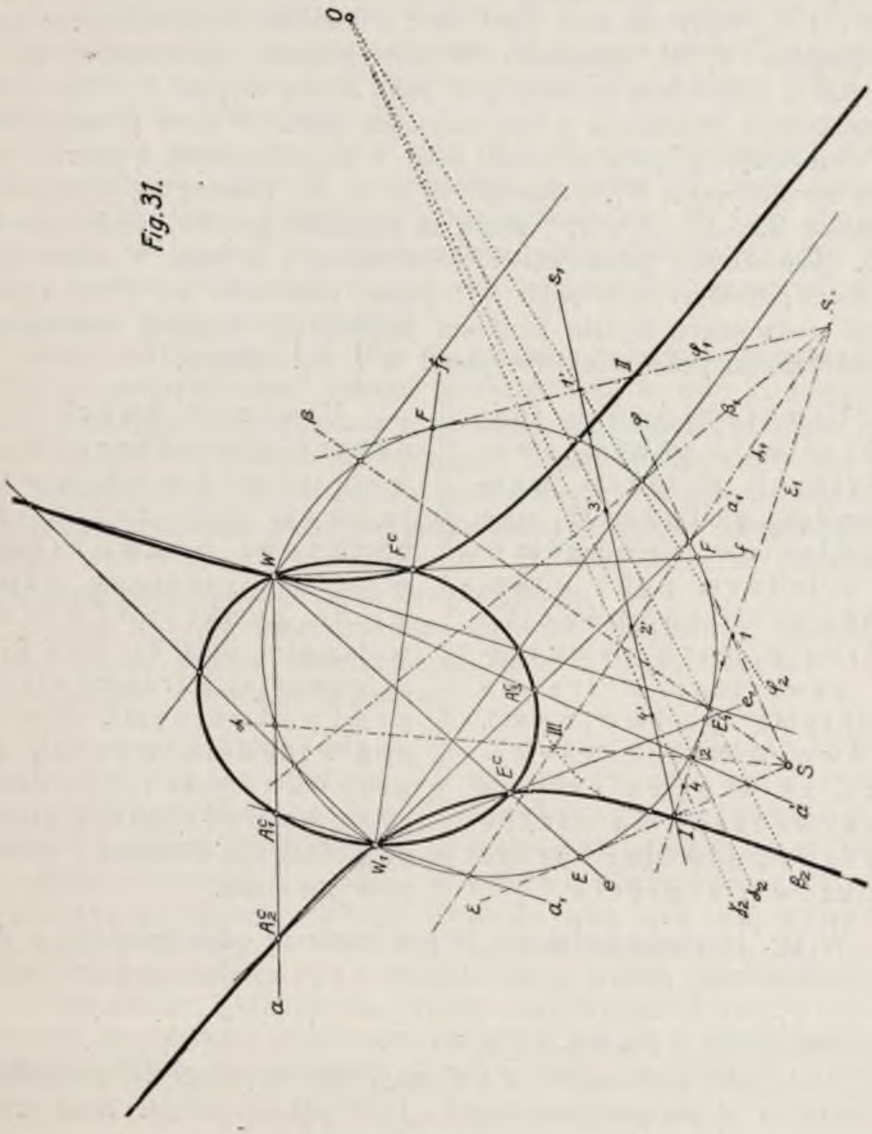


Fig. 31.

Elementy odpowiednie, wyznaczonych w ten sposób, jednokreślnych pęków pomocniczych $S(\varepsilon, \alpha, \beta)$ i $S_1(\varepsilon_1, \alpha_1, \beta_1)$ przetną się w trzech

punktach I, II, III, leżących wraz z punktami S i S_1 na przekroju stożkowym C_1^2. W celu uzupełnienia pęków S i S_1 poprowadźmy przez punkt I prostą s, która przecina promienie α i β w punktach 1 i 2 i prostą s_1, która przecina promienie α_1 i β_1 w punktach 1′ i 2′. Proste $11'=\alpha_2$ i $22'=\beta_2$ przecinają się w punkcie 0, środku jednokreślności pęków S i S_1, który dozwala pęki owe, a pośrednio i jednokreślne pęki inwolucyjne W, W_1 uzupełnić. W szczególności promieniowi np. α_2 w pęku 0, odpowiada promień α w pęku S i α_1 w pęku S_1. Następnie elementowi α odpowiada w inwolucyjnym pęku W para promieni aa', zaś elementowi α_1 para promieni a_1a_1'. w jednokreślnym z poprzednim pęku inwolucyjnym W_1. Promienie a, a', a_1, a_1' przetną się w czterech punktach A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4^c, które są punktami krzywej rzędu czwartego. Jednakowoż promieniowi podwójnemu e w pęku W odpowiada promień podwójny e_1 w pęku W_1; punkt przecięcia się E^c tych promieni podwójnych będzie punktem podwójnym krzywej, utworzonej jednokreślnemi pękami inwolucyjnemi W i W_1. Zatym:

U t w o r e m d w u c h j e d n o k r e ś l n y c h p ę k ó w i n w o l u c y j n y c h w t a k i m w z a j e m n y m p o ł o ż e n i u, ż e p r o m i e n i o w i p o d w ó j n e m u w j e d n y m p ę k u o d p o w i a d a p r o m i e ń p o d w ó j n y w d r u g i m, j e s t k r z y w a r z ę d u c z w a r t e g o z t r z e m a p u n k t a m i p o d w ó j n e m i. Z r ó w n a ń P l ü c k e r a w y n i k a, ż e k r z y w a t a j e s t k l a s y s z ó s t e j, m a c z t e r y s t y c z n e p o d w ó j n e i s z e ś ć p u n k t ó w p r z e g i ę c i a.	U t w o r e m d w u c h j e d n o k r e ś l n y c h s z e r e g ó w i n w o l u c y j n y c h w t a k i m w z a j e m n y m p o ł o ż e n i u, ż e p u n k t o w i p o d w ó j n e m u w j e d n y m s z e r e g u o d p o w i a d a p u n k t p o d w ó j n y w d r u g i m, j e s t k r z y w a k l a s y c z w a r t e j z t r z e m a s t y c z n e m i p o d w ó j n e m i. Z r ó w n a ń P l ü c k e r a w y n i k a, ż e k r z y w a t a j e s t r z ę d u s z ó s t e g o, p o s i a d a c z t e r y p u n k t y p o d w ó j n e i s z e ś ć p u n k t ó w z w r o t u.

W fig. 18 punkt podwójny W jest punktem odosobnionym; w fig. 19 jednokreślność pęków pomocniczych S i S_1 ustalona jest przyjętym kołem C_1^2, przechodzącym przez punkt przecięcia się I stycznych ε i ε_1, poprowadzonych z punktu S i S_1 do C^2.

Jeżeli pęki pomocnicze S i S_1 mają być w położeniu perspektywicznym, to oś perspektywiczności p tych pęków przejść musi przez punkt przecięcia się I promieni ε i ε_1 (fig. 20).

c) Krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na prostą i krzywą rzędu trzeciego, oraz krzywa klasy czwartej, rozpadająca się na punkt i krzywą klasy trzeciej.

8. Promieniowi, łączącemu wierzchołki W i W_1 dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, uważanemu za element pęku W, odpowiada w ogólnym wypadku para promieni w pęku W_1, z której żaden nie przechodzi przez wierzchołek W.

Obierzmy teraz dwa takie pęki W i W_1 aby promieniowi WW_1, jako elementowi pęku W, odpowiadały w pęku W_1 dwa promienie, z których jeden przechodzi przez wierzchołek W, czyli aby element pęku W pokrył się odpowiednim sobie elementem pęku W_1. O tego rodzaju jednokreślnych pękach inwolucyjnych mówimy, że są w położeniu półperspektywicznym [1]).

Jeżeli pęki inwolucyjne W i W_1 związane są ze sobą jednokreślnemi lub perspektywicznemi pękami pomocniczemi, to owe jednokreślne pęki inwolucyjne będą wówczas w położeniu półperspektywicznym, gdy promienie SW i S_1W stanowić będą parę promieni odpowiednich w pękach pomocniczych. Jeżeli pękiem pomocniczym jest pęk inwolucyjny, to półperspektywiczne położenie jednokreślnych pęków inwolucyjnych wystąpi wówczas, gdy wierzchołki W i W_1 leżeć będą na promieniu podwójnym pomocniczego pęku inwolucyjnego.

Prosta WW_1, w której schodzą się dwa odpowiednie promienie jednokreślnych pęków inwolucyjnych, stanowi część krzywej rzędu czwartego, jako utworu tych pęków.

Utworem dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych w położenu półperspektywicznym jest krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na prostą i krzywą rzędu trzeciego.

Utworem dwuch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych w położeniu półperspektywicznym jest krzywa klasy czwartej, rozpadająca się na punkt i krzywą klasy trzeciej.

Jeżeli co do wzajemnych położeń pęków inwolucyjnych jednokreślnych w położeniu półperspektywicznym nie poczyniliśmy żadnych dalszych założeń, to otrzymana krzywa rzędu trzeciego nie posiada

---

[1]) H. Schroeter: „Ueber eine besondere Curve 3-er Ordnung". Mathematische Annalen V. Lipsk, 1872, str. 50. — „Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung". Lipsk, 1888, str. 11.

żadnych punktów podwójnych, jest więc krzywą klasy szóstej, rodzaju pierwszego.

Jeżeli jednak założymy, że promień podwójny w jednym pęku odpowiada promieniowi podwójnemu w pęku drugim, to punkt przecięcia się tych promieni podwójnych będzie punktem podwójnym otrzymanej krzywej rzędu trzeciego. W tym więc wypadku krzywa ta jest klasy czwartej rodzaju zerowego.

Fig. 21 jest przykładem krzywej, otrzymanej przy pomocy jednokreślnych pęków pomocniczych S i S_1, w których parę odpowiednich elementów tworzą promienie SW_1 i S_1W.

Fig. 22 wyobraża tę samą krzywą, otrzymaną przez użycie pęków pomocniczych perspektywicznych. Tego samego rodzaju pęków pomocniczych użyto przy wyznaczeniu krzywych przedstawianych na fig. 23 i fig. 27. W ostatnim wypadku promieniowi podwójnemu e w pęku W odpowiada promień podwójny e_1 w pęku W_1; punkt więc przecięcia się E^c tych promieni jest punktem podwójnym krzywej rzędu trzeciego.

Krzywa, przedstawiona na fig. 25, wyznaczona jest przy użyciu pęku pomocniczego inwolucyjnego o wierzchołku T.

9. Rozpatrując dwa jednokreślne pęki inwolucyjne, wykluczyliśmy milcząco pęki paraboliczne, rozumiejąc zawsze przez pęk inwolucyjny pęk eliptyczny lub hiperboliczny.

W tej części naszego rozpatrywania przyjmiemy, że jeden z dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych jest pękiem parabolicznym.

W tym celu obierzmy przekrój stożkowy C^2, a na nim dwa punkty W i W_1, które niech będą wierzchołkami dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych. Następnie przyjmijmy punkt S również na przekroju stożkowym C^2, zaś punkt S_1 wewnątrz lub zewnątrz tego przekroju i uważajmy te punkty za środki szeregów inwolucyjnych, leżących na C^2, a powstałych z przecięcia się tego przekroju stożkowego z pękami inwolucyjnemi o wierzchołkach W i W_1. Dla zupełnego wyznaczenia jednokreślnych pęków inwolucyjnych przyjmiemy trzy promienie α, β, γ w pęku o wierzchołku S i tyleż promieni α_1, β_1, γ_1 w jednokreślnym z poprzednim pęku S_1, albo też przez punkty S i S_1 poprowadzimy krzywą C_1^2.

W ten sposób parom promieni a_1a_1', b_1b_1'... w pęku W_1 fig. 28 odpowie w pęku W para promieni am, bm..., w których promień $m = WS$ jest promieniem spólnym. Pęk W jest więc pękiem parabolicznym. Z prostą m, jako z elementem pęku parabolicznego, przynależnym do wszystkich par promieni tego pęku, przecinać się będą wszystkie pary pro-

mieni pęku inwolucyjnego W_1. Prosta ta stanowi tedy część krzywej, utworzonej przez pęki W i W_1.

Promieniowi $SW_1=\delta$ jako elementowi pęku S odpowiada w pęku W prócz promienia $WS=m$ jeszcze drugi promień $WW_1=d$. Promieniowi δ odpowiada w pęku S_1 promień δ_1, z którym związane są dwa promienie $d_1 d_1'$ w pęku inwolucyjnym W_1. Punkty przecięcia się promienia d z promieniami $d_1 d'_1$ są punktami krzywej C^4, które schodzą się w punkcie W_1. Punkt W_1 jest więc punktem podwójnym tej krzywej.

Utworem dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, z których jeden jest pękiem parabolicznym, jest krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na prostą i krzywą rzędu trzeciego z jednym punktem podwójnym.

Utworem dwuch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, z których jeden jest szeregiem parabolicznym, jest krzywa klasy czwartej, rozpadająca się na punkt i na krzywą klasy trzeciej z jedną styczną podwójną.

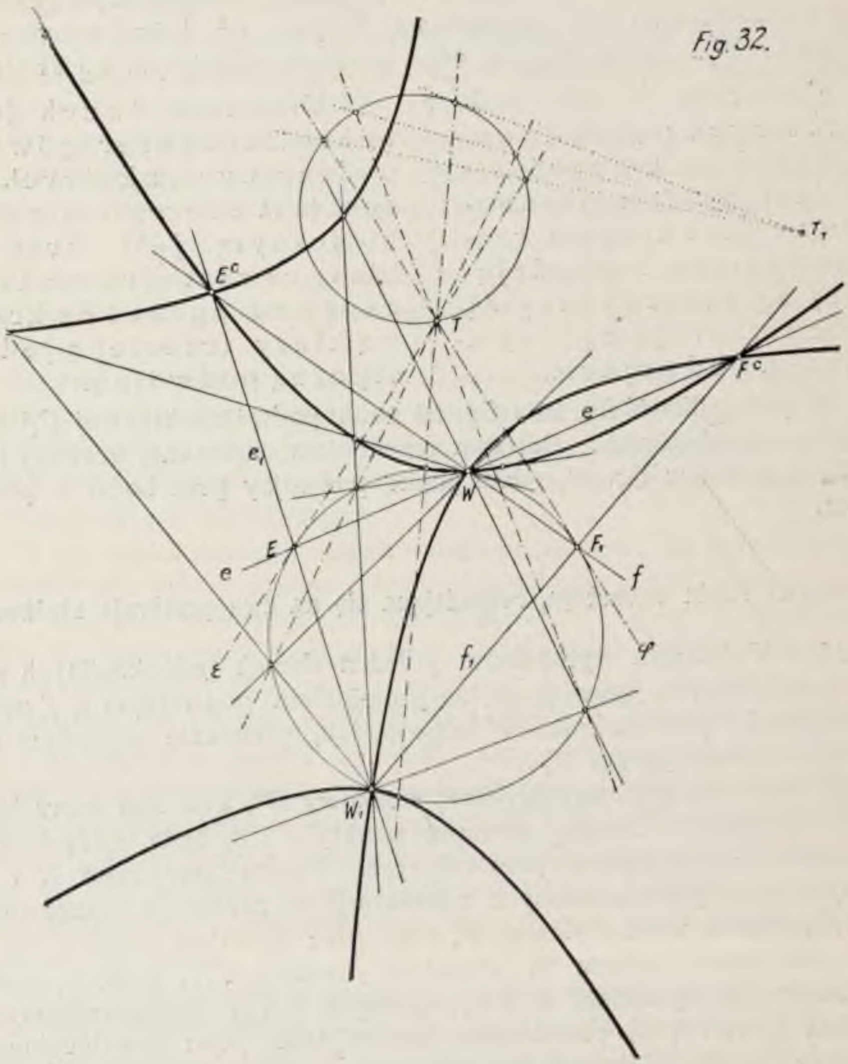
W przypadkach fig. 24 i fig. 29 punkt podwójny krzywej C_4^3 jest punktem odosobnionym. Dalszym przykładem omawianej krzywej jest fig. 26, a w końcu fig. 30, gdzie punkt podwójny przechodzi w punkt zwrotu.

d) Krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na dwa przekroje stożkowe.

10. W dalszym wyróżnieniu położeń dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych przyjmijmy, że promieniom podwójnym e, f pęku inwolucyjnego o wierzchołku W odpowiadają promienie podwójne e_1, f_1 w pęku inwolucyjnym W_1.

W tym celu obierzmy przekrój stożkowy C^2, a na nim wierzchołki W i W_1 (fig. 31). Niechaj następnie punkty S i S_1 będą wierzchołkami jednokreślnych pęków pomocniczych. Punkty styczności E i F stycznych ε i φ, poprowadzonych z punktu S do przekroju stożkowego C^2, połączone z wierzchołkami W, dają parę promieni podwójnych e i f w pęku inwolucyjnym W. Podobnie proste e_1 i f_1, łączące punkt W_1 z punktami styczności E_1 i F_1 stycznych ε_1 i φ_1, poprowadzonych z punktu S_1 do C^2, są promieniami podwójnemi pęku inwolucyjnego o wierzchołku W_1. Załóżmy, że promieniom ε i φ pęku S odpowiadają promienie ε_1 i φ_1 w pęku S_1. Dla wyznaczenia jednokreślności pęków pomocniczych, a przez to i pęków inwolucyjnych, przyjmiemy w pęku

S dowolny trzeci promień α, zaś w pęku S_1 odpowiadający mu promień α_1. Promieniowi α odpowiada w pęku W para promieni a, a', zaś promieniowi α_1 para promieni $a_1 a_1'$ w pęku inwolucyjnym W_1. Przez



uzupełnienie pęków pomocniczych S i S_1 przy pomocy środka jednokreślności 0 (ustęp 7 str. 405) uzupełnimy w znany sposób jednokreślne pęki inwolucyjne W i W_1.

Pod względem konstrukcyjnym osiągniemy znaczne uproszczenie, gdy pomocnicze pęki jednokreślne S i S_1 będą perspektywiczne (fig. 33).

Promienie podwójne e i e_1 przetną się w punkcie E^c, zaś f i f_1

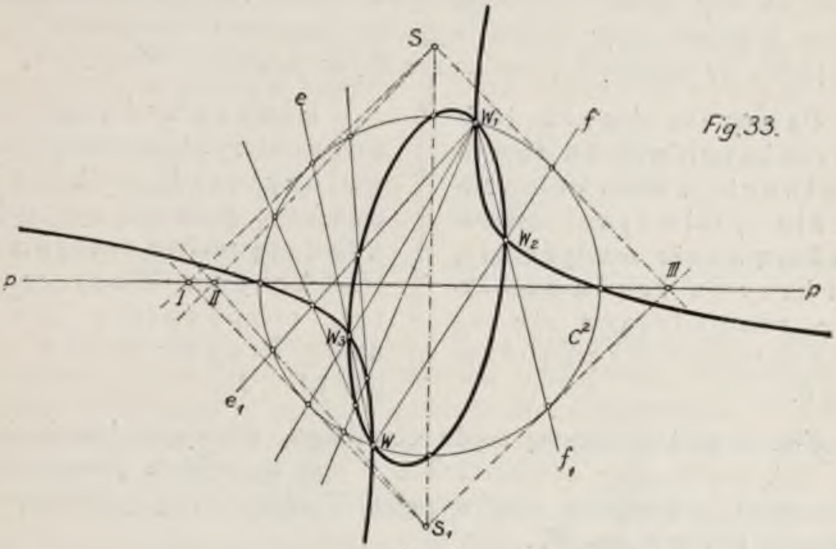


Fig. 33.

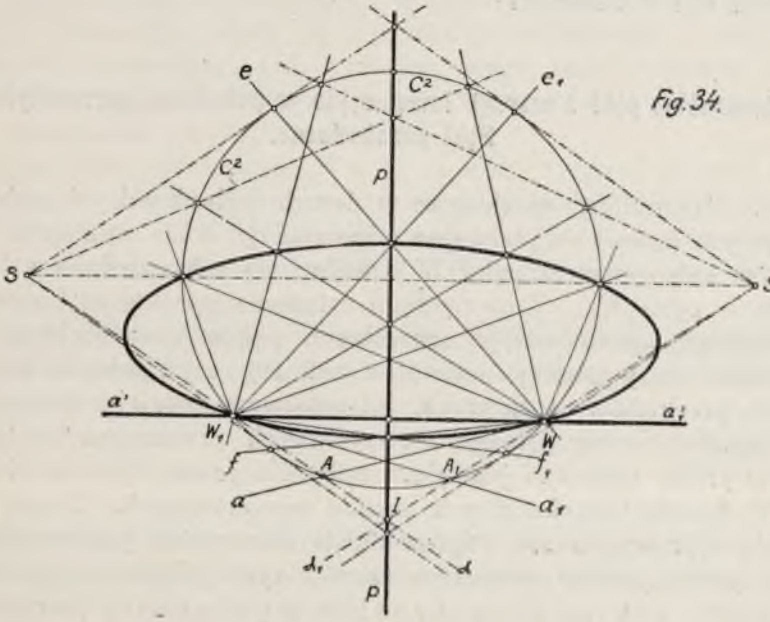


Fig. 34.

w punkcie F^c, a punkty te, jako punkty przecięcia się promieni podwójnych, będą punktami podwójnemi krzywej rzędu czwartego, utworzonej przez jednokreślne pęki inwolucyjne o wierzchołkach W i W_1.

Krzywa ta zatym posiadać będzie cztery punkty podwójne, a mianowicie punkty E^c, F^c i wierzchołki W i W_1 jednokreślnych pęków inwolucyjnych. Ponieważ jednak krzywa rzędu czwartego nie może posiadać więcej jak trzy punkty podwójne, jeśli niema rozpaść się na krzvwe rzędów niższych, więc w tym wypadku krzywa C^4 rozpadnie się na dwa przekroje stożkowe, przecinające się w punktach $W W_1 E^c F^c$.

Utworem dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych, w których promienie podwójne odpowiadają sobie wzajemnie, jest krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na dwie krzywe rzędu drugiego.

Utworem dwuch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych, w których punkty podwójne odpowiadają sobie wzajemnie, jest krzywa klasy czwartej, rozpadająca się na dwie krzywe klasy drugiej.

Fig. 32 podaje krzywą rzędu czwartego, złożoną z dwuch hiperbol. Pęk inwolucyjny o wierzchołku T jest tu pękiem pomocniczym; promieniom podwójnym e i f w pęku W odpowiadają promienie podwójne e_1 i f_1 w pęku W_1.

e) Jednokreślne pęki i szeregi inwolucyjne w położeniu perspektywicznym. Pęki paraboliczne.

11. Przyjmijmy wkońcu, że w dwuch jednokreślnych pękach inwolucyjnych promienie podwójne odpowiadają sobie wzajemnie a jednocześnie jeden element pęku W pokrywa się odpowiednim sobie elementem w pęku W_1. Z pierwszego założenia wynika, że krzywa rzędu czwartego, jako utwór jednokreślnych pęków inwolucyjnych posiadać będzie cztery punkty podwójne (ust. 10), czyli składać się będzie z dwuch przekrojów stożkowych. Następstwem drugiego założenia będzie rozpadnięcie się jednego z otrzymanych przekrojów stożkowych na dwie proste (ust. 8). Jedną prostą będzie prosta, łącząca wierzchołki WW_1 dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych. Drugą prostą, powstałą z przecięcia się odpowiednich elementów pęków W i W_1, uważać można za oś perspektywiczności tych pęków, a pęki takie za pęki inwolucyjne jednokreślne w położeniu perspektywicznym. Jeśli więc przyjmiemy szereg inwolucyjny na prostej, którą uważać będziemy za oś perspektywiczności dwuch jednokreślnych

pęków inwolucyjnych, a nadto obierzemy dwa dowolne punkty W i W_1, które połączymy z elementami szeregu inwolucyjnego, to w ten sposób otrzymamy dwa pęki inwolucyjne jednokreślne w położeniu perspektywicznym [1]).

Utworem dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych w położeniu perspektywicznym jest krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na dwie proste i na krzywą rzędu drugiego.

Utworem dwuch jednokreślnych szeregów inwolucyjnych w położeniu perspektywicznym jest krzywa klasy czwartej, rozpadająca się na dwa punkty i na krzywą klasy drugiej.

Na fig. 34 pęki pomocnicze S i S_1 są perspektywiczne, promienie podwójne e_1, f_1 w pęku W_1 odpowiadają promieniom podwójnym e, f w pęku W. Element a' pęku W pokryje się odpowiednim elementem a_1' pęku W_1, skoro promieniowi $S_1 W = \alpha$ w pęku S podporządkujemy element $S_1 W = \alpha_1$ w pęku S_1.

Jeśli promień podwójny jednego pęku pokrywa się odpowiadającym mu promieniem podwójnym w pęku drugim, to otrzymana krzywa rzędu czwartego składa się z przekroju stożkowego i z tej prostej, jako prostej podwójnej. Gdy przytym druga para promieni podwójnych w obu pękach odpowiada sobie wzajemnie, to i przekrój stożkowy rozpada się na dwie proste.

Jeżeli pęki inwolucyjne W i W_1 chcemy związać ze sobą pękiem pomocniczym inwolucyjnym, to przekrój stożkowy C^2, przechodzący przez wierzchołki W i W_1, musi być styczny do pary odpowiednich promieni tego pęku, zaś wierzchołki W i W_1 leżeć muszą na jednym promieniu podwójnym tego pęku.

Jeżeli inwolucyjny pęk pomocniczy będzie pękiem parabolicznym, to utworem dwuch jednokreślnych pęków inwolucyjnych będzie krzywa rzędu czwartego, rozpadająca się na cztery proste.

12. Przyjmijmy w końcu dwa jednokreślne pęki inwolucyjne, oba paraboliczne. Z rozważań ustępu 8 wynika, że proste SW i $S_1 W_1$, łączące wierzchołki pęków inwolucyjnych z odpowiedniemi wierzchołkami pęków pomocniczych, stanowić będą część krzywej rzędu czwartego. Drugą częścią tej krzywej może być tedy tylko przekrój stożkowy. Zatym:

---

[1]) R. Böger, Ebene Geometrie der Lage. Lipsk 1910, str. 110.

U t w o r e m d w u c h j e d n o k r e ś l n y c h p a r a b o l i c z n y c h p ę k ó w i n w o l u c y j n y c h j e s t k r z y w a r z ę d u c z w a r t e g o, r o z p a d a j ą c a s i ę n a d w i e p r o s t e i n a k r z y w ą r z ę d u d r u g i e g o.

U t w o r e m d w u c h j e d n o k r e ś l n y c h p a r a b o l i c z n y c h s z e r e g ó w i n w o l u c y j n y c h j e s t k r z y w a k l a s y c z w a r t e j, r o z p a d a j ą c a s i ę n a d w a p u n k t y i n a k r z y w ą k l a s y d r u g i e j.

Pęki pomocnicze S i S_1 mogą być jednokreślne, perspektywiczne, lub tworzyć pęk inwolucyjny.

Lwów. *Kazimierz Bartel.*